Übungen zur Vorlesung im Wintersemester 2017/18

**Analytische Mechanik und Spezielle Relativitätstheorie**

von Domenico Giulini

---

**Blatt 13**
**Alle Aufgaben sind Hausübungen und ergeben Bonuspunkte**

---

### Vorbereitendes

Als $(n+1)$-dimensionalen Minkowskiraum bezeichnen wir den $(n+1)$-dimensionalen reellen affinen Raum $(M, V, +, \eta)$ dessen zugehöriger $(n+1)$-dimensionaler Vektorraum mit der symmetrischen, nicht-ausgearteten Bilinearform $\eta$ der Signatur $(1, n)$ („Minkowski-Metrik“) versehen ist. Wir schreiben abkürzend $\eta(v, w) := v \cdot w$. Für eine angepasste Basis $\{e_0, e_1, \cdots e_n\}$ gilt dann

$$e_\mu \cdot e_\nu = \eta_{\mu\nu} := \begin{cases} 1 & \text{für } \mu = \nu = 0 \\ -1 & \text{für } \mu = \nu \neq 0 \\ 0 & \text{für } \mu \neq \nu \end{cases} \tag{1}$$

Wir schreiben $v^2 := v \cdot v$ und definieren eine „Minkowski Norm“

$$\|v\|_\eta := \sqrt{|v \cdot v|} \tag{2}$$

die natürlich keine Norm im eigentlichen Sinne ist (warum nicht).

Ein Vektor $v$ heisst *zeit*-, *licht*- oder *raumartig*, je nachdem $v^2 > 0, = 0$ oder $< 0$ ist. Der Nullvektor wird meist mit zu den lichtartigen Vektoren gerechnet. Ein Vektor $\neq 0$ heißt kausal, wenn er entweder zeit- oder lichtartig ist. Ein linearer Unterraum $W \subset V$ heißt raumartig, lichtartig, oder zeitartig, je nachdem $\eta\big|_W$ negativ definit, nicht negativ definit aber negativ semidefinit, oder aber indefinit ist. Das Orthokomplement eines Vektors $v \neq 0$ ist der Unterraum

$$v^\perp := \{w \in V : v \cdot w = 0\}. \tag{3}$$

Er ist $n$ dimensional und zeit-, licht- oder raumartig, falls $v$ raum-, licht- bzw. zeitartig ist. Beachten Sie: Ist $v$ lichtartig so ist $\{v\} \cap v^\perp = \{v\}$, andernfalls ist der Durchschnitt trivial (nur der Nullvektor).

Die Relation $v \sim w \Leftrightarrow v \cdot w > 0$ definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der zeitartigen Vektoren mit zwei Äquivalenzklassen. Diese nennt man „Zeitorientierungen“. Zwei zeitartige Vektoren $v, w$ haben also die gleiche oder entgegengesetzte Zeitorientierung, je nachdem $v \cdot w > 0$ oder $< 0$ gilt.

**H1 (Hausübung, 5 Punkte)**

In einem Vektorraum mit positiv definitem Skalarprodukt folgt bekanntlich aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$v^2 w^2 \geq (v \cdot w)^2 \tag{4}$$

die Dreiecksungleichung

$$\|v\| + \|w\| \geq \|v + w\| \,, \tag{5}$$

wobei Gleichheit in (4) und (5) genau dann gilt, wenn $v$ und $w$ linear abhängig bzw. parallel ($v = \lambda w$ mit $\lambda > 0$) sind. Wie oben betrachte man nun den Vektorraum $V$ ($n > 2$) mit indefinitem Skalarprodukt (1). Zeigen Sie, dass für linear unabhängige $v, w$ nun die folgenden modifizierten Cauchy-Schwarz-Ungleichungen gelten: 3 Punkte

$$v^2 w^2 \star (v \cdot w)^2 \,, \quad \text{wobei} \star \begin{cases} > & \text{falls } \mathrm{Span}\{v, w\} \text{ raumartig}\,, \\ = & \text{falls } \mathrm{Span}\{v, w\} \text{ lichtartig}\,, \\ < & \text{falls } \mathrm{Span}\{v, w\} \text{ zeitartig}\,. \end{cases} \tag{6}$$

Überlegen Sie sich mögliche Dreiecksungleichungen als Folge von (6) mit der verallgemeinerten „Norm“ (2). Zeigen Sie insbesondere, dass für zeitartige Vektoren $v, w$ gleicher Zeitorientierung (d.h. $v \cdot w > 0$) die „umgekehrte Dreiecksungleichung“ gilt: 2 Punkte

$$\|v + w\|_\eta > \|v\|_\eta + \|w\|_\eta \,. \tag{7}$$

Sie ist manchmal Grundlage des sogenannten „Zwillingsparadoxons“.

**H2 (Hausübung, 5 Punkte)**

Sei nun $n > 2$; zeigen Sie: Die strenge „umgekehrte“ Cauchy-Schwarz-Ungleichung 2 Punkte

$$v^2 w^2 < (v \cdot w)^2 \tag{8}$$

gilt für festes $v$ genau dann für jeden Vektor $w \in V$ der linear unabhängig zu $v$ ist, wenn $v$ zeitartig ist. [*Tipp: Zerlegen Sie $w$ in seine Komponenten parallel und orthogonal zu $v$.*]

Wir betrachten nun eine Gerade durch einen Punkt $r \in M$ in Richtung $v$:

$$G_r(v) := \{r + \lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}, \tag{9}$$

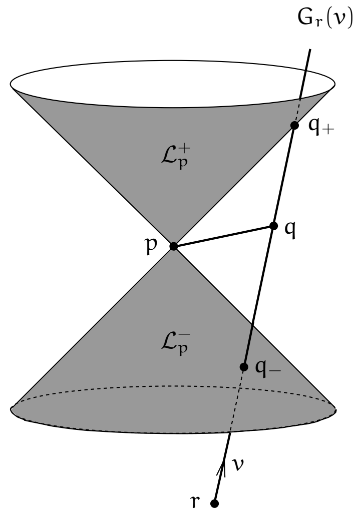
und den Lichtkegel mit Vertex am Punkte $p \notin G_r(v)$:

$$\mathcal{L}_p := \{x \in M : \|x - p\|_\eta = 0\}\,. \tag{10}$$

Zeigen Sie: Ist $v$ zeitartig, so existieren immer genau zwei Schnittpunkte. Ist hingegen $v$ lichtartig, so existiert genau ein Schnittpunkt falls $(p - r) \notin v^\perp$ und kein Schnittpunkt falls $(p - r) \in v^\perp$. 3 Punkte

## H3 (Hausübung, 5 Punkte)

$G_r(\nu)$ sei eine zeitartige Gerade durch $r$ in Richtung $\nu$ (vgl. (9)) und $\mathcal{L}_p$ der Lichtkegel mit Vertex an einem Punkt $p \notin G_r(V)$ (vgl. (10)). Wie in Aufgabe H2 gezeigt, schneidet die Gerade den Lichtkegel in zwei Punkten $q_+$ und $q_-$. Sei $q$ ein beliebiger Punkt auf $G_r(n)$ zwischen $q_+$ und $q_-$; siehe Abbildung.




Zeigen Sie: 5 Punkte

$$\|p - q\|_\eta^2 = \|q_+ - q\|_\eta \cdot \|q - q_-\|_\eta \,. \tag{11}$$

Dieser Sachverhalt entspräche einem Analogon des Höhensatzes in der Euklidischen Geometrie, wenn $p - q$ orthogonal zur Geraden $G_r(\nu)$ stünde, das ist aber *nicht* gefordert. Die Beziehung (11) gilt für *jedes* $q$ zwischen $q_+$ und $q_-$ !

[*Tipp: Die Vektoren* $(q_+ - p) = (q - p) + (q_+ - q)$ *und* $(q_- - p) = (q - p) + (q_- - q)$ *sind lichtartig. Also gilt*

$$\|q - p\|_\eta^2 = (q_+ - q)^2 + 2(q - p)\cdot(q_+ - q)\,, \tag{12}$$

$$\|q - p\|_\eta^2 = (q_- - q)^2 + 2(q - p)\cdot(q_- - q)\,. \tag{13}$$

*Nutzen Sie, dass* $q_+ - q$ *und* $q - q_-$ *parallel sind, woraus folgt, dass ein* $\lambda \in \mathbb{R}_+$ *existiert mit* $q_+ - q = \lambda(q - q_-)$. *Multiplizieren Sie nun* (13) *mit* $\lambda$ *und addieren Sie das zu* (12). ]

## H4 (Hausübung, 5 Punkte)

Zeigen Sie direkt im Anschluss an Aufgabe H3: $p - q$ steht genau dann orthogonal zu $G_r(\nu)$, d.h. $(p - q)\cdot \nu = 0$, wenn $q$ in der Mitte zwischen $q_+$ und $q_-$ liegt. Also sind gemäß der *Einstein'schen Synchronisationsvorschrift* alle bezüglich $\nu$ zu $q$ gleichzeitigen Ereignisse gegeben durch $q + \nu^\perp$, d.h. die zu $G_r(\nu)$ orthogonale Hyperfläche durch $q$. 2 Punkte

Betrachten Sie nun zwei zueinander windschiefe zeitartige Geraden

$$G_r(v) \;:=\; \{r + \lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}\,, \tag{14a}$$
$$G_{r'}(v') \;:=\; \{r' + \lambda' v' : \lambda' \in \mathbb{R}\}\,. \tag{14b}$$

„Windschief“ bedeutet, dass die Geraden schnittfremd ($G_r(v) \cap G_{r'}(v') = \emptyset$) und nicht parallel ($v, v'$ linear unabhängig) sind. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $v^2 = v'^2 = 1$.

Zeigen Sie: Es gibt genau ein Paar $(p, p') \in G_r(v) \times G_{r'}(v')$, so dass $p'$ gleichzeitig zu $p$ bezüglich $v$ und $p$ gleichzeitig zu $p'$ bezüglich $v'$ ist. 3 Punkte

**H5 (Hausübung, 5 Punkte)**

Ein Punktteilchen bewege sich im Minkowski-Raum $(M, V, +, \eta)$ entlang der „Weltlinie“ (zeitartige Kurve im Minkowski-Raum) $\mathbb{R} \ni \tau \to x(\tau) \in M$, wobei der Parameter $\tau$ die Eigenzeit sei, d.h. die mit dem Faktor $1/c$ ($c$ = Lichtgeschwindigkeit) reskalierte Eigenlänge. Die erste $\tau$-Ableitung $\dot{x}(\tau) := dx(\tau)/d\tau$ ergibt dann das entlang der Wetlinie definierte Feld der „Vierergeschwindigkeit“ $\mathbb{R} \ni \tau \to u(\tau) := \dot{x}(\tau) \in V$, eine weitere Ableitung das ebenfalls entlang der Wetlinie definierte Feld der „Viererbeschleunigung“ $\mathbb{R} \ni \tau \to a(\tau) := \ddot{x}(\tau) \in V$, usw.

Zeigen Sie, dass 1 Punkt

$$u \cdot u \;=\; c^2\,, \tag{15a}$$
$$u \cdot a \;=\; 0\,, \tag{15b}$$
$$u \cdot a \;=\! -a \cdot a\,. \tag{15c}$$

$u^\perp(\tau) = \{v \in V : v \cdot u(\tau) = 0\} subset V$ nennt man den zum Weltlinienpunkt $x(\tau)$ gehörigen momentanen Ruheraum. Zeigen Sie, dass die Abbildung der $\eta$-orthogonalen Projektion $P_\tau : V \to u^\perp(\tau)$ gegeben ist durch 1 Punkt

$$P_\tau(v) = v - u(\tau)\big(u(\tau) \cdot v\big)/c^2\,. \tag{16}$$

Man sagt die Weltlinie $\tau \to x(\tau)$ sei „von konstanter Beschleunigung“ genau dann, wenn $P_\tau\big(\dot{a}(\tau)\big) = 0$. Zeigen Sie, dass Weltlinien konstanter Beschleunigung durch folgende Differentialgleichung charaktersiert sind: 1Punkt

$$\ddot{u} + u\;(\dot{u} \cdot \dot{u})/c^2 = 0\,. \tag{17}$$

Seien $u_0, \dot{u}_0$ die Anfangswerte, zeigen Sie, dass die Lösungskurve $u(\tau)$ in der zeitartigen Ebene $Span\{u_0, \dot{u}_0\} \subset V$ verlaufen wird. Führt man in dieser Ebene eine angepasste affine Basis ein, so kann man wegen (15a) in Komponenten schreiben: $u(\tau) = c\big(\cosh(\phi(\tau))\,,\, \sinh(\phi(\tau))\big)$. Bestimmen Sie das allgemeine $\phi(\tau)$ aus (17) und damit alle zeitartigen Weltlinien konstanter Beschleunigung. 2 Punkte

**H6 (Hausübung, 5 Punkte)**

Betrachten Sie folgende Bewegung in der $(ct, x)$-Ebene des Minkowski Raumes:

$$\begin{pmatrix} ct(\tau) \\ x(\tau) \end{pmatrix} = \frac{c^2}{g} \cdot \begin{pmatrix} \sinh\left(\frac{g\tau}{c}\right) \\ \cosh\left(\frac{g\tau}{c}\right) - 1 \end{pmatrix} . \tag{18}$$

Dabei ist $c$ die Lichtgeschwindigkeit, $g$ eine Konstante mit der physikalischen Dimension einer Beschleunigung und $\tau$ der Kurvenparameter mit der physikalischen Dimension einer Zeit.

Zeigen Sie, dass $\tau$ die Eigenzeit (= Eigenlänge/c) entlang der Kurve ist (gemessen bezüglich der Minkowski-Metrik). (Tipp: Dazu reicht es aus, zu zeigen, dass $c^2\dot{t}^2 - \dot{x}^2 = c^2$; warum ?) 1 Punkt

Zeigen Sie, dass die Bewegung (18) von konstanter Beschleunigung $g$ ist. 1 Punkt

Nehmen Sie an, ein Raumschiff bewege sich von der Erde aus zur einem anderen Ort im Universum, so, dass auf der ersten Hälfte der Strecke die Bewegung von konstanter Beschleunigung $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ gemäß (18) stattfindet und auf der zweiten Hälfte ebenfalls mit konstanter Beschleunigung gleichen Betrags aber umgekehrter Schubrichtung: $g = -10\,\mathrm{m/s^2}$.

Berechnen Sie die Eigenzeit $\tau$, die so im Raumschiff während des gesamten Fluges zur Andomeda-Galaxie (Entfernung $2,5$ Millionen Lichtjahre) vergeht und vergleichen Sie diese mit der auf der Erde vergangenen Zeit $t$. Kann also ein mitreisender Astronaut die Reise innerhalb eines Menschenlebens beenden? Wenn ja, wieviel weiter könnte man so innerhalb eines Menschenlebens reisen? Viellecht sogar „quer durchs Univesum“ (13,7 Milliarden Lichtjahre)? 1 Punkt

Die maximale Geschwindigkeit relativ zur Erde erreicht das Raumschiff auf halbem Wege (klar!). Welchem Gamma-Faktor $\gamma_{max} = 1/\sqrt{1-(v_{max}/c)^2}$ entspricht das? 1 Punkt
Angenommen im Moment maximaler Geschwindigkeit träfe ein Staubkorm mit einer Ruhemasse $m_0 = 10^{-6}$Gramm auf die „High-Tech-Windschutzscheibe“ ihres Raumschiffs und bliebe dort stecken. Wie hoch wäre die dabei an die Scheibe abgegebene kinetische Energie $E_{kin} = m_0c^2(\gamma_{max} - 1)$? Welche Geschwindigkeit hat ein Rolls-Royce (Masse 3 Tonnen) gleicher kinetischer Energie? Wo kann man solche „High-Tech-Windschutzscheibe“ kaufen, die das aushalten? Scheint Ihnen nun die Reise zur Andromeda-Galaxie immer noch realistisch? Wenn nicht, wie steht es mit einer Reise zum nächten Stern Alpha-Centauri (Entfernung $4,3$ Lichtjahre)? (Achtung: Wir haben noch gar nicht über die physikalische Realisierung eines Antriebs gesprochen, der eine konstante Beschleunigung von $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ über die Hälfte der angegebenen Strecken aufrecht erhält: Den kann es nach heutiger Einschätzung wohl nicht; siehe letzte Vorlesung zum Thema „Relativistische Verallgemeinerung der Ziolkowski’sche Raketengleichung“.) 1 Punkt