Übungen zur Vorlesung im Wintersemester 2017/18

Analytische Mechanik und Spezielle Relativitätstheorie

von Domenico Giulini

Blatt 4

Aufgabe P1 (Präsenzübung)

Sei $\psi \in (\mathbb{R}^3)^*$ Vektor im Dualraum des $\mathbb{R}^3$. Sein Kern ist

$$Ker(\psi) := \{v \in \mathbb{R}^3 | \psi(v) = 0\} . \tag{1}$$

Wie üblich definiert das standard euklidische Skalarprodukt g des $\mathbb{R}^3$ einen Isomorphismus, der jedem $v \in \mathbb{R}^3$ ein $g^{\downarrow}(v) \in (\mathbb{R}^3)^*$ zuordnet, gemäß

$$g^{\downarrow}(v)(w) := g(v, w) , \qquad \forall w \in \mathbb{R}^3 . \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass $Kern\big(g^{\downarrow}(v)\big) = v^{\perp}$, wobei $v^{\perp}$ die Menge der Vektoren senkrecht zu v bezeichnet.

Im $\mathbb{R}^3$ mit Standardbasis $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ und zugehörigen Koordinaten (x, y, z) betrachten wir das Vektorfeld

$$\vec{K}(\vec{x}) := -y\,\vec{e}_x + x\,\vec{e}_y + \vec{e}_z . \tag{3}$$

Interpretieren Sie dieses als Geschwindigkeitsfeld einer Bewegung im $\mathbb{R}^3$. Um welche Bewegung handelt es sich? Machen Sie sich so die Distribution $\vec{x} \mapsto [\vec{K}(\vec{x})]^{\perp}$ klar, die jedem Punkt $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ die zu $\vec{K}(\vec{x})$ senkrechte Ebene zuordnet. Können Sie daraus ersehen, dass Sie je zwei Punkte des $\mathbb{R}^3$ durch stetige und zumindest stückweise glatte Kurven tangential zur Distribution verbinden können? Warum zeigt das bereits ohne jede Rechnung, dass die Distribution nicht integrabel sein kann?

Zeigen Sie nun mit Hilfe des Satzes von Frobenius auch formal, dass die Distribution $[\vec{K}]^{\perp}$ nicht-integrabel ist. Berechnen Sie dazu die Rotation von $\vec{K}$ und ihr Skalarprodukt mit $\vec{K}$.

Zeigen Sie, dass das zu $\vec{K}$ gehörige Dualvektorfeld $\underline{K} := g(\vec{K}, \cdot)$ gegeben ist durch

$$\underline{K}(x, y, z) := -(y/r)\,dx + (x/r)\,dy + dz . \tag{4}$$

Bestätigen Sie ebenfalls durch Nachrechnen des Frobenius'schen Kriteriums, also von $d\underline{K} \wedge \underline{K} \neq 0$, dass die zu $\underline{K}$ gehörige Kerndistribution nicht integrabel ist.

Geben Sie schließlich die entsprechenden nicht-holonomen Zwangsbedingungen an.

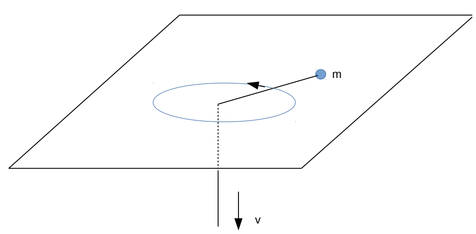
Aufgabe P2 (Präsenzübung)

Eine Punktmasse m (schwere gleich träge Masse) gleite reibungsfrei auf der Oberfläche einer Kugel mit Radius R, die im Gravitationsfeld $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ ruht.

1. Wie lautet die Zwangsbedingung und um welchen Typ handelt es sich?
2. Formulieren Sie die Lagrangegleichungen erster Art und bestimmen Sie die Zwangskraft.
3. Die Punktmasse starte bei einer Anfangshöhe z_0 mit Anfangsgeschwindigkeit v_0 tangential zum Meridian nach unten. Ab welcher Höhe würde die Punktmasse die Kugeloberfläche nach Außen verlassen, wenn die Zwangsbedingung sie nicht daran hinderte?

Aufgabe P3 (Präsenzübung)

Ein Teilchen der Masse m sei an einem Faden befestigt und rotiere um den Ursprung der x-y-Ebene. Zudem wird an dem Faden mit konstanter Geschwindigkeit v nach unten gezogen (siehe Abbildung).



1. Bestimmen Sie die Zwangsbedingungen und deren Typ.
2. Geben Sie die generalisierte Koordinate an und formulieren Sie die Gesamtenergie (unter Berücksichtigung der Zwangsbedingung). Ist die Energie erhalten?

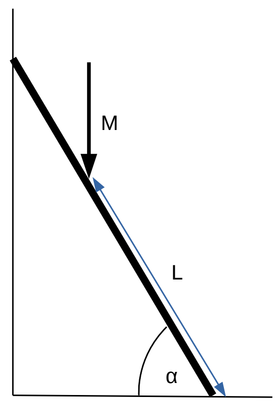
Aufgabe H1 (Hausübung, 5 Punkte)

Das sphärische Pendel ist eine Punktmasse, die sich unter Einwirkung der Schwerkraft auf einer Kugeloberfläche bewegt (gehalten an einem masselosen Faden). Formulieren Sie die Zwangsbedingung. Um welchen Typ handelt es sich? Geben Sie die Lagrangegleichungen erster Art an. Es seien (r, θ, φ) Kugelkoordinaten. Zeigen Sie, dass die Gesamtenergie E und der Drehimpuls L_z in z-Richtung erhalten ist. Verwenden Sie diese erhaltenen Größen, um $\dot{\varphi}$ zu eliminieren und eine Gleichung für θ zu formulieren. Substituieren Sie in dieser Gleichung $u = \cos\theta$, so dass Sie die Gleichung auf folgende Form bringen können:

$$\dot{u}^2 + U(u) = 0\ . \tag{5}$$

Bestimmen Sie $U(u)$ und diskutieren Sie qualitativ die Eigenschaften der Lösungen für u. 5 Punkte

Aufgabe H2 (Hausübung, 5 Punkte)



Eine Leiter der Länge l und der Masse m steht mit einem Neigungswinkel α an einer Wand (reibungsfrei) und wird von einer Person der Masse M bis zu einer Länge L bestiegen. Die Leiter soll am Boden eine Haftreibung erfahren mit einem Haftreibungskoeffizienten $\mu_H = 0,7$ (dabei ist die Haftreibungskraft gegeben durch $F_H = \mu_H F_\perp$, wobe $F_\perp$ die nach unten wirkende Kraft ist). Bis zu welchem Anstellwinkel α kann die Leiter zusammen mit der Person angelehnt werden, ohne wegzurutschen?

5 Punkte

Aufgabe H3 (Hausübung, 5 Punkte)

Dies Aufgabe ist eine Fortführung der Präsenzübung 3 von Blatt 3. Wir verwenden im Folgenden die gleiche Notation.

Die kinetische Energie der Scheibe ist

$$T = \tfrac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}^2 + \tfrac{1}{2} I_2 \dot{\theta}^2 + \tfrac{1}{2} M \dot{\xi}^2 + \tfrac{1}{2} M \dot{\eta}^2 \ . \tag{6}$$

Dabei sind I_i Konstanten (Trägheitsmomente) und ϕ und θ wie in P3 auf aus Blatt 3. Bestimmen Sie die Lagrange-Gleichungen 2. Art (wir wollen annehmen, dass keine externen Kräfte wirken) und integrieren Sie diese vollständig für alle vier Koordinatenfunktionen. Beschreiben Sie damit genau die Kurve, die der Berührpunkt des Rades mit der xy-Ebene in Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen durchläuft. Bestimmen Sie auch die zwei Lagrange'schen Parameter und berechnen Sie daraus alle Komponenten der Zwangskraft. Zeigen Sie, dass diese in Anbetracht der eben bestimmten Bahnkurve eine offensichtliche physiklische Interpretation besitzt. 5 Punkte