Übungen zur Vorlesung im Wintersemester 2017/18

Analytische Mechanik und Spezielle Relativitätstheorie

von Domenico Giulini

Blatt 5

Aufgabe P1 (Präsenzübung)

Wie in der Vorlesung beschrieben kann der Zustand eines mechanisches Systems von f Freiheitsgraden durch $2f$ verallgemeinerte Koordinaten $(q^1, \cdots q^f\,,\, \dot{q}^1, \cdots \dot{q}^f)$ charakterisiert werden. Die Interpretation dieser Koordinaten spielt für das Folgende keine Rolle, aber man kann sich $q := (q^1, \cdots q^f)$ als Parameter der räumlichen Lage (Konfiguration) und $\dot{q} := (\dot{q}^1, \cdots \dot{q}^f)$ als deren zeitliche Änderungsraten denken.

Gegeben sei ein verallgemeinertes Kraftfeld mit f Komponenten $Q_a(t, q, \dot{q})$, $1 \leq a \leq f$. Zeigen Sie: Es gibt eine reellwertige Funktion $V(t, q, \dot{q})$, so dass für jede Kurve $t \mapsto \big(q(t), \dot{q}(t)\big)$ mit $\dot{q}(t) := dq(t)/dt$ gilt

$$Q_a\big(t, q(t), \dot{q}(t)\big) = -\frac{\partial V}{\partial q^a}\Big|_{\substack{q=q(t)\\ \dot{q}=dq(t)/dt}} + \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial V}{\partial \dot{q}^a}\Big|_{\substack{q=q(t)\\ \dot{q}=dq(t)/dt}}\right] \tag{1a}$$

genau dann, wenn V die Form hat

$$V(t, q, \dot{q}) = V_0(t, q) - V_a(t, q)\dot{q}^a\,. \tag{1b}$$

Aufgabe H1 (Hausübung, 5 Punkte)

In der Elektrodynamik ist die von einem elektromagnetischen Feld $(\vec{E}, \vec{B})$ auf eine Punktladung e ausgeübte Kraft (Lorentzkraft) gegeben durch

$$\vec{F}(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}) = e\big(\vec{E}(t, \vec{x}) + \dot{\vec{x}} \times \vec{B}(t, \vec{x})\big)\,. \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass diese die Form (1a) hat indem Sie (1b) explizit angeben.
Tipp: Erinnern Sie sich dazu daran, wie das elektromagnetische Feld durch skalar- und Vektorpotential ausgedrückt werden kann.

Aufgabe P2 (Präsenzübung)

Die kinetische Energie eines mechanischen Systems von f Freiheitsgraden habe die Form

$$T(q, \dot{q}) = \tfrac{1}{2} g_{ab}(q)\dot{q}^a\dot{q}^b\,, \tag{3}$$

mit einer nicht weiter spezifizierten, von $q = (q^1, \cdots, q^f)$ abhängenden symmetrischen $f \times f$ Koeffizientenmatrix g_{ab}, die zudem als nicht-ausgeartet angenommen wird, d.h. ihre Determinante verschwindet nirgends.

Zeigen Sie, dass die Lagrange-Gleichungen 2. Art identisch sind zu

$$g_{ab}\ddot{q}^b + \left(g_{ab,c} - \tfrac{1}{2}g_{bc,a}\right)\dot{q}^b\dot{q}^c = 0\,, \tag{4a}$$

wobei $g_{ab,c} := \partial g_{ab}/\partial q^c$.

Zeigen Sie weiter, dass dies äquivalent ist zu

$$\ddot{q}^a + \Gamma^a_{bc}\dot{q}^b\dot{q}^c = 0\,, \tag{4b}$$

mit

$$\Gamma^a_{bc} := \tfrac{1}{2}g^{an}(-g_{bc,n} + g_{nb,c} + g_{cb,n})\,, \tag{4c}$$

wobei g^{ab} die zu g_{ab} inversen Matrix ist; d.h. $g^{ab}g_{bc} = \delta^a_c$.

Aufgabe H2 (Hausübung, 5 Punkte)

Ein Teilchen bewege sich reibungsfrei auf der Oberfläche einer Kugel vom Radius R um den Ursprung des $\mathbb{R}^3$, auf die es durch nicht weiter spezifizierte Zwagskräfte gebunden bleibt.

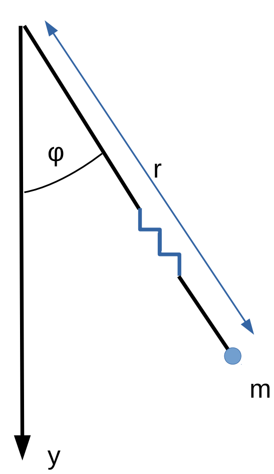
Parametrisieren Sie die Kugeloberfläche durch sphärische Polarwinkel (θ, φ) und geben Sie in diesen die kinetische Energie an. 1 Punkt

Stellen Sie die Langrange-Gleichung 2. Art für den Fall verschwindenden Potentials auf und zeigen/argumentieren Sie, dass die Lösungen genau die Großkreise sind. 2 Punkt

Stellen Sie die Langrange-Gleichung 2. Art für den Fall eines Potentials $V(\vec{x}) = mgz$ (homogenes Gravitationsfeld in Richtung der negative z-Achse) auf. 2 Punkt

Aufgabe P3 (Präsenzübung)

Eine Masse m sei an einer Feder (Federkonstante k, vernachlässigbare Eigenmasse) im homogenen Schwerefeld $\vec{g} = g\vec{e}_y$ aufgehängt. Wie in der Abbildung gezeigt (y-Achse nach unten, x-Achse horizontal nach rechts), besteht die Bewegung der Masse also aus einer Pendelbewegung und einer longitudinalen Federschwingung.

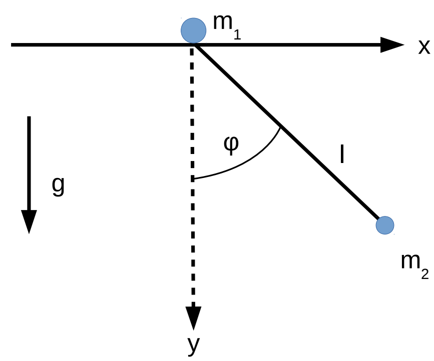


Benutzen Sie ebene Polarkoordinaten als generalisierte Koordinaten (mit der y-Achse als Polachse) und stellen Sie in diesen die Lagrangefunktion auf.

Leiten Sie aus den Lagrange-Gleichungen 2. Art die Bewegungsgleichungen ab und interpretieren Sie alle darin auftretenden Terme.

Aufgabe H3 (Hausübung, 5 Punkte)

Eine Masse m_1 sei durch eine masselose Stange (deren Masse zu vernachlässigen ist) der Länge l mit einer zweiten Masse m_2 verbunden. Während m_2 eine Pendelbewegung im homogenen Schwerefeld $\vec{g} = g\vec{e}_y$ ausführt, kann sich m_1 in horizontaler Richtung entlang der x-Achse reibungsfrei bewegen; siehe Zeichnung. Dabei sei das Problem wie in Aufgabe P3 zweidimensional gedacht, d.h. die z Richtung spielt im Folgenden keine Rolle.



Finden Sie die Zwangsbedingungen und klassifizieren Sie diese. Geben Sie für das Problem angemessene generalisierte Koordinaten an. 1 Punkt

Geben Sie die Lagrangefunktion an und identifizieren Sie eine generalisierte Koordinate, von der die Lagrangefunktion nicht abhängt (sogenannte „zyklische Koordinate"). Geben Sie aufgrund dieser Beobachtung eine Erhaltungsgröße an. *Hinweis*: Benutzen Sie die Lagrange-Gleichungen für diese Koordinate. 2 Punkte

Mit Hilfe des oben bestimmten Erhaltungssatzes können Sie das Problem vollständig integrieren, wenn Sie annehmen, dass der Auschlagswinkel φ klein, so dass Sie Terme von quadratischer und höherer Ordnung in φ vernachlässigen können (dann können Sie z.B. $\sin\varphi \approx \varphi$ und $\cos\varphi \approx 1$ setzen). Nehmen Sie außerdem an (das ist eine zusätzliche Annahme; warum?), dass Sie auch Terme von quadratischer und höherer Ordnung in φ *und* $\dot{\varphi}$ vernachlässigen können, dass also auch die Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\varphi}$ klein sind. 2 Punkte