Übungen zur Vorlesung im Wintersemester 2017/18

Analytische Mechanik und Spezielle Relativitätstheorie

von Domenico Giulini

Blatt 8

Aufgabe P1 (Präsenzübung)

Wir wiederholen nochmals die Definition des Trägheitsabbildung aus der geometrischen Sicht der Raum-Zeit: In einer Newton-Galilei Raumzeit (M, V, τ, h) bewegen sich N Punktmassen m_a, $a = 1, \cdots, N$, auf Weltlinien $\gamma_a : \mathbb{R} \to M$, $t \mapsto \gamma_a(t)$, wobei der Parameter t so gewählt ist, dass $\tau(\gamma_a(t) - o_*) = t$, d.h. t ist der (absolute) zeitliche Abstand zum ein für allemal fest gewählten Punkt o_* (der weiter keine Rolle spielen wird). Die Lagen der Punkte zum gleichen Parameterwert t sind somit gleichzeitig.

Zur Erinnerung: Es war $\mathrm{Ker}(\tau) = \{v \in V : \tau(v) = 0\} \subset V$ der zugehörige Vektorraum zu den affinen Unterräumen $\Sigma_t := \{p \in M : \tau(p - o_*) = t\}$ jeweils untereinander gleichzeitiger Ereignisse. Wählt man irgend eine Referenzweltlinie $o : \mathbb{R} \to M$, $t \mapsto o(t)$, dann ist die Trägheitsabbildung $I_o(t)$, zum Zeitpunkt t ein bezüglich h symmetrischer Endomorphismus von $\mathrm{Ker}(\tau)$, gegeben durch

$$I_o(t) := \sum_{a=1}^{N} m_a \Big[\big\|\gamma_a(t) - o(t)\big\|_h^2 \mathbf{1} - \big(\gamma_a(t) - o(t)\big) \otimes \big(\gamma_a(t) - o(t)\big)^{\downarrow} \Big] . \tag{1}$$

Hier ist $\mathbf{1}$ die Identitätsabbildung in $\mathrm{Ker}(\tau)$ und $\|\cdot\|_h$ die durch h definierte Norm auf $\mathrm{Ker}(\tau)$. Außerdem benutzen wir die Notation $v^{\downarrow} := h(v, \cdot)$.

Die Schwerpunktsweltlinie $s : \mathbb{R} \to M$, $t \mapsto s(t)$, war definiert durch

$$s(t) := \sum_{a=1}^{N} \frac{m_a}{M}\, \gamma_a(t) \,, \tag{2}$$

wobei M die Summe aller Massen m_a ist. Beachten Sie, dass (2) als konvexe Summe (d.h. mit positiven Koeffizienten deren Summe 1 ist) von Punkten im affinen Raum wohldefiniert ist.

Zeigen Sie den *Steiner'schen Satz*,

$$I_o(t) := I_s(t) + M \Big[\big\|R(t)\big\|_h^2\, \mathbf{1} - R(t) \otimes R^{\downarrow}(t) \Big] \,, \tag{3}$$

wobei $R(t) := o(t) - s(t)$

Aufgabe H1 (Hausübung, 5 Punkte)

Der zur Trägheitsabbildung I_o assoziierte Trägheitstensor ist definiert durch („Index runterziehen“ mit h)

$$I_o^{\downarrow}(v,w) := h\big(v, I(w)\big)\,. \tag{4}$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Steiner'schen Satzes, dass die Schwerpunktsweltlinie die durch den Trägheitstensor definierte symmetrische Bilinearform minimiert, d.h. es gilt für alle $v \in \mathrm{Ker}(\tau)$: 2 Punkte

$$I_o^{\downarrow}(v,v) \geq I_s^{\downarrow}(v,v)\,. \tag{5}$$

Beweisen Sie weiter die folgende Identität (Lagrange) 2 Punkte

$$\mathrm{Spur}(I_s(t)) = \sum_{a=1}^{N}\sum_{b=1}^{N} \frac{m_a m_b}{M} \left\|\gamma_a(t) - \gamma_b(t)\right\|_h^2\,. \tag{6}$$

Aufgabe P2 (Präsenzübung)

In der Vorlesung wurden die Euler'schen Gleichungen des kräftefreien Kreisels diskutiert:

$$I'_1\dot\omega'_1 \;=\; \omega'_2\omega'_3(I'_2 - I'_3)\,, \tag{7a}$$
$$I'_2\dot\omega'_2 \;=\; \omega'_3\omega'_1(I'_3 - I'_1)\,, \tag{7b}$$
$$I'_3\dot\omega'_3 \;=\; \omega'_1\omega'_2(I'_1 - I'_2)\,. \tag{7c}$$

Dabei sind die gestrichenen Komponenten der Winkelgeschwindigkeit auf die körperfeste orthonormierte Basis bezogen (in der Vorlesung hatten wir statt dem Strich einen Hut), die darüberhinaus so gewählt ist, dass sie die Trägkeitsabbildung diagonalisiert mit Eigenwerten I'_1, I'_2 und I'_3, die wir als paarweise verschieden (unsymmetrischer Kreisel) voraussetzen. Wir machen keine Annhame darüber, welche dieser drei Eigenwerte der größte, mittlere und kleinste ist.

Wir betrachten die Bewegung um die erste Hauptträgheitsachse, also $\omega'^1 =: p = konst.$ und $\omega'^2 = \omega'^3 = 0$. Wir fragen, ob diese Bewegung stabil ist. Dazu betachten wir Bewegungen in der Nähe, für die also gilt

$$\omega'^1(t) \;=\; p + \Delta p(t)\,, \tag{8a}$$
$$\omega'^2(t) \;=\; \Delta q(t)\,, \tag{8b}$$
$$\omega'^2(t) \;=\; \Delta r(t)\,. \tag{8c}$$

Setzen Sie dies in die Euler Gleichungen ein und vernachlässigen Sie alle Potenzen in Δp, Δq und Δr jenseits der ersten (d.h. Sie linearisieren die Euler-Gleichungen).

Zeigen Sie, dass die linearisierten Euler-Gleichungen zu $\Delta p(t) =: k = konst.$ führen und zu ($\Delta\dot q := d\Delta q/dt$ etc.)

$$\Delta\dot q \;=\; \frac{I'_3 - I'_1}{I'_2}\,p\,\Delta r\,, \tag{9a}$$

$$\Delta\dot r \;=\; \frac{I'_1 - I'_2}{I'_3}\,p\,\Delta q\,. \tag{9b}$$

Aufgabe H2 (Hausübung, 5 Punkte)

Diskutieren Sie das System (9) für die drei Fälle vollständiger Entartung (Fall 1: $I'_1 = I'_2 = I'_3$), teilweiser Entartung (Fall 2a: $I'_1 = I'_2 \neq I'_3$ und Fall 2b: $I'_1 \neq I'_2 = I'_3$) und keiner Entartung (Fall 3: Alle I'_i paarweise verschieden), wobei im Fall 3 keine Annahme darüber gemacht wird, welche der Eigenwerte der kleinste, mittlere und größte ist. Lösen Sie die Differentialgleichungen in jedem einzelnen Fall und nennen Sie alle Möglichkeiten nicht-beschränkter Lösungen (also Lösungen, die für $t \to \infty$ nicht beschränkt bleiben). Beweisen Sie damit insbesondere den Satz für Fall 3, dass Drehungen um die Hauptachsen mit größtem und kleinstem Trägheitsmoment stabil, um die mittlere Hauptachse jedoch instabil sind. 2 Punkte 1 Punkt

Tipp: Im Fall 2b können Sie (9) *komplex zusammenfassen. Fall 3 entkoppeln Sie (9) durch nochmaliges Differenzieren. Bedenken Sie: Die dann erhaltenen allgemeinen Lösungen der Differentialgleichungen 2. Ordung müssen aber auch den ursprünglichen Gleichungen erster Ordung genügen.*

Diskutieren Sie das so erhaltene Ergebnis in Zusammenhang mit den bereits in der Vorlesung besprochenen Gleichungen 2 Punkte

$$J^2 = (J'^1)^2 + (J'^2)^2 + (J'^3)^2 \,, \tag{10a}$$

$$E = \frac{(J'^1)^2}{2I'_1} + \frac{(J'^2)^2}{2I'_2} + \frac{(J'^3)^2}{2I'_3} \tag{10b}$$

und den im Anhang gezeigten Bildern, die die möglichen Schnittkurven der Sphäre (10a) mit dem Ellipsoid (10b) im $\mathbb{R}^3$ der drei Komponenten J'^i zeigen. Ordnen Sie je ein horizontales Bildpaar einer Drehung um einer der Hauptachsen (welcher?) zu.

Aufgabe H3 (Hausübung, 5 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe der Euler-Gleichungen allgemein, dass die Bewegungen des freien Kreisels mit zeitunabhängigen Komponenten ω'^i genau die um die Hauptträgheitsachsen sind.

Anhang: Bilder zu Aufgabe H2