

---

**Blatt 9**

---

**P1 (Präsenzübung)**

In der Vorlesung wurde die Poisson-Klammer eingeführt, die jedem Paar  $(f, g)$  von glatten, reellwertigen Funktionen auf dem Phasenraum wieder eine glatte Phasenraumfunktion  $\{f, g\}$  zuordnet.

Zeigen Sie mit Hilfe der in der Vorlesung gegebenen Definition der Poisson-Klammer, dass die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen wie folgt geschrieben werden können:

$$\dot{q}^a(t) = \left. \{q^a, H\} \right|_{\substack{q=q(t) \\ p=p(t)}}, \quad (1a)$$

$$\dot{p}_a(t) = \left. \{p_a, H\} \right|_{\substack{q=q(t) \\ p=p(t)}}. \quad (1b)$$

$$(1c)$$

Machen Sie sich klar, dass die Koordinaten  $q^a$  und  $p_a$  auf der rechten Seite als Phasenraumfunktionen aufgefasst werden. So gilt etwa

$$\{q^a, p_b\} = \delta_b^a. \quad (2)$$

Man nennt Koordinaten  $q = (q^1, \dots, q^f)$ ,  $p = (p_1, \dots, p_f)$ , des Phasenraums, für die (2) gilt, *kanonische Koordinaten*.

**H1 (Hausübung, 5 Punkte)**

Seien  $(q^1, q^2, q^3)$  und  $(p_1, p_2, p_3)$  kanonische Koordinaten eines Systems mit drei Freiheitsgraden. Wir definieren die drei Phasenraumfunktionen  $L_1 := q^2 p_3 - q^3 p_2$ ,  $L_2 := q^3 p_2 - q^2 p_3$  und  $L_3 := q^1 p_2 - q^2 p_1$ .

Zeigen Sie:

$$\{L_1, L_2\} = L_3, \quad \{L_2, L_3\} = L_1, \quad \{L_3, L_1\} = L_2. \quad (3)$$

2 Punkte

Welche Lie-Algebra erkennen Sie darin wieder?

Wir betrachten nun neue Koordinaten  $q'^a$  und  $p'_a$ , die aus den alten durch eine der beiden Transformationen folgender Form hervorgeht:

$$q^a \mapsto q'^a := F^a(q), \quad p_a \mapsto p'_a := (F^{-1})^c_a(q) p_c, \quad (4a)$$

$$q^a \mapsto q'^a := q^a, \quad p_a \mapsto p'_a := p_a + \sigma_a(q). \quad (4b)$$

Dabei ist  $F$  eine in beiden Richtungen glatte Bijektion  $F : \mathbb{R}^f \supseteq U \rightarrow U' \subseteq \mathbb{R}^f$  mit Jacobi-Matrix  $F^c_a(q) := \partial F^c(q)/\partial q^a$  und deren Inverser  $(F^{-1})^c_a(q)$ . Ferner ist  $\sigma(q) = \sigma_a(q) dq^a$  eine geschlossene 1-Form die nur von den Variablen  $q$  abhängt, die also  $\partial \sigma_a / \partial q^b - \partial \sigma_b / \partial q^a = 0$  erfüllt.

Zeigen Sie, dass in diesen beiden Fällen die gestrichenen Koordinaten wieder kanonisch sind.

3 Punkte

Beachten Sie: Damit ist auch gezeigt, dass die angegebenen Abbildungen (4) *kanonische Transformationen* im Sinne der in der Vorlesung gegebenen Definition sind. Wie kann man das sofort einsehen?

3 Punkte

## P2 (Präsenzübung)

Ein Teilchen der Masse  $m$  bewege sich unter Einfluss des Potentials  $V(r) = -\alpha/r$ , wobei  $r := \|\vec{x}\|$ .

Stellen Sie die Lagrange-Funktion in kartesischen Koordinaten  $(x, y, z)$  und in Kugelkoordinaten  $(r, \theta, \varphi)$  auf und berechnen Sie jeweils die zugehörigen kanonischen Impulse  $(p_x, p_y, p_z)$  bzw.  $(p_r, p_\theta, p_\varphi)$ .

## H2 (Hausübung)

Diese Aufgabe ist eine direkte Fortsetzung von P2.

Berechnen Sie die Hamiltonfunktion und stellen Sie die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen sowohl in kartesischen- als auch in Kugelkoordinaten auf.

3 Punkte

Zeigen Sie unter Benutzung von  $\vec{L}(\vec{x}, \vec{p}) := \vec{x} \times \vec{p}$  Konstante der Bewegung sind, d.h. ihr Wert bleibt entlang einer Lösungskurve der Hamilton'schen Bewegungsgleichungen konstant (kann aber natürlich von Lösungskurve zu Lösungskurve variieren).

2 Punkte

## H3 (Hausübung)

Die Lagrange-Funktion eines Teilchens der Masse  $m$  und elektrischen Ladung  $q$  ist gegeben durch

$$L = \frac{1}{2} m \|\dot{\vec{x}}\|^2 - q(\phi - \dot{\vec{x}} \cdot \vec{A}) \quad (5)$$

Dabei sind  $\phi$  und  $\vec{A}$  das elektromagnetische skalare- und Vektorpotential, mit deren Hilfe das elektrische und magnetische Feld gegeben ist durch  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \dot{\vec{A}}$  bzw.  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ .

Berechnen Sie die zu L gehörende Energiefunktion  $E(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$ . 1 Punkt

Berechnen Sie die zu den Geschwindigkeiten  $\dot{\vec{x}}$  gehörende konjugierten Impulse  $\vec{p}$  (als Funktion von  $\vec{x}$ ,  $\dot{\vec{x}}$  und  $t$ ). Was fällt Ihnen auf? 1 Punkt

Berechnen Sie die zu L gehörende Hamiltonfunktion  $H(\vec{x}, \vec{p}, t)$ . Vergleichen Sie diese mit L. Was fällt auf? 1 Punkt

Zeigen Sie, dass die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen genau auf die Newton'schen Bewegungsgleichungen eines geladenen Teilchens unter Einwirkung der Lorentzkraft führen. 2 Punkt

### Aufgabe B1 (5 Bonuspunkte)

Ein ideal bigsames Seil von konstanter Masse pro Längeneinheit  $\mu$  und Länge  $\ell$  hänge frei, nur mit seinen Enden an den Punkten  $\vec{x}_1 = (x_1, y_1, z_1)$  und  $\vec{x}_2 = (x_2, y_2, z_2)$  befestigt, in homogenen Gravitationsfeld  $\vec{g} = -g\vec{e}_3$ . (Damit dies möglich ist, muss natürlich  $\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\| < \ell$  sein.) Dabei beschreibt das Seil eine Kurve  $[\lambda_1, \lambda_2] \ni \lambda \mapsto \vec{x}(\lambda) \in \mathbb{R}^3$ , parametrisiert durch einen nicht weiter spezifizierten Parameter  $\lambda$  mit  $\vec{x}(\lambda_{1,2}) = \vec{x}_{1,2}$ , die es zu bestimmen gilt. Dazu soll das Prinzip angewendet werden, dass die Kurve so sein wird, dass Sie ihre potentielle Energie im Gravitationsfeld (bei fest gehaltenen Endpunkten und fester Länge) minimiert.

Zeigen Sie, dass die Potentielle Energie bis auf eine additive Konstante gegeben ist durch

$$E_{\text{pot}} = \mu g \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda z(\lambda) \sqrt{\dot{x}^2(\lambda) + \dot{y}^2(\lambda) + \dot{z}^2(\lambda)}. \quad (6)$$

wobei ein Punkt die Ableitung nach  $\lambda$  bezeichnet.

Zeigen Sie mit Hilfe der Euler-Lagrange Gleichungen für die zyklischen Variablen  $x$  und  $y$ , dass die Kurve in einer zur  $xy$ -Ebene senkrechten Ebene verläuft. 2 Punkt2

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können Sie also annehmen, die Kurve verlaufe in der  $zx$ -Ebene. Schreiben Sie dann (6) um, indem Sie  $x$  als Parameter, d.h.  $x \mapsto z(x)$  als Darstellung der Kurve verwenden. Statt der Euler-Lagrange-Gleichung für  $z(x)$  stellen Sie gleich den Erhaltungssatz auf, der aus der Tatsache folgt, dass die Lagrange-Funktion nicht explizit von  $x$  abhängt. und finden Sie daraus die Lösung für ein Seil der Länge  $\ell$  durch die Punkte  $(x_1, z_1) = (0, 0)$  und  $(x_2, z_2) = (x_*, z_*)$ . (Das ist elementar möglich und die Kurve werden/sollten Sie erkennen.) 3 Punkte

### Aufgabe B2 (5 Bonuspunkte)

Ähnlich wie in Aufgabe P1 betrachte man eine Kurve  $\vec{x}(\lambda)$  zwischen den Punkten  $\vec{x}(\lambda_{1,2}) = \vec{x}_{1,2}$  im Raum mit homogenen Gravitationsfeld  $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ . Wir stellen uns diesmal vor, entlang dieser Kurve könne ein Massenpunkt von  $\vec{x}_1$  nach  $\vec{x}_2$  infolge der Einwirkung des Gravitationsfeldes reibungsfrei gleiten, wobei natürlich  $z_1 > z_2$  sein soll. Wir fragen uns, wie die Kurve geformt sein muss, damit die Zeit, die die Masse für diesen Gleitvorgang von  $\vec{x}_1$  nach  $\vec{x}_2$  benötigt, möglichst klein wird.

Zeigen Sie: Lässt man die Masse bei  $\vec{x}_1$  mit der Geschwindigkeit  $\dot{\vec{x}}(t=0) = \vec{0}$  los, dann ist die Zeit, nach der die Masse  $\vec{x}_2$  entlang der Kurve  $\vec{x}(\lambda)$  erreicht, gegeben durch 1 Punkt

$$T = \sqrt{\frac{1}{2g}} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \sqrt{\frac{\dot{x}^2(\lambda) + \dot{y}^2(\lambda) + \dot{z}^2(\lambda)}{z_1 - z(\lambda)}}. \quad (7)$$

*Tipp: Es ist  $T = \int dt$ . Aber  $dt = ds/v$ , wobei  $ds = d\lambda \sqrt{\dot{x}^2(\lambda) + \dot{y}^2(\lambda) + \dot{z}^2(\lambda)}$  das Differential der Bogenlänge entlang der Kurve ist und  $v$  die Geschwindigkeit, mit der die Masse die Kurve an der betreffenden Stelle durchläuft. Letztere ist aber durch den Energiesatz als Funktion des Ortes sofort bestimmbar.*

Zeigen Sie wieder mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen für die zyklischen Variablen  $x$  und  $y$ , dass die Lösungskurve in einer Ebene senkrecht zur  $xy$ -Ebene verläuft. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können Sie also wieder annehmen, die Kurve verlaufe in der  $xz$ -Ebene. Schreiben Sie dann (7) wieder um, indem Sie  $x$  als Parameter, d.h.  $x \mapsto z(x)$  als Darstellung der Kurve verwenden. Stellen Sie den Erhaltungssatz auf, der aus der Tatsache folgt, dass die Lagrange-Funktion nicht explizit von  $x$  abhängt. Finden Sie damit die optimale Kurve kürzester Fallzeit zwischen den Punkten  $(x_1, z_1) = (0, 0)$  und  $(x_2, z_2) = (x_*, z_*, < 0)$  (Tipp: Siehe unten). Zeigen Sie, dass für  $x_2 > -z_*\pi/2$  die Kurve zum Teil unterhalb  $z_*$  fällt. Wie erklären Sie sich das? 1 Punkt  
1 Punkt  
1 Punkt  
1 Punkt

*Tipp: Es ist für die Integration günstig, die Substitution  $z = -r_0(1 - \cos \varphi) = -2r_0 \sin^2(\varphi/2)$  vorzunehmen.*

### Aufgabe B3 (5 Bonuspunkte)

Ein System von  $N$  Punktmassen  $m_a$  ( $1 \leq a \leq N$ ) bewege sich unter Einfluss des Potentials  $V: \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{R}$  gemäß

$$m_a \ddot{\vec{x}}_a = -\frac{\partial V}{\partial \vec{x}_a}. \quad (8)$$

Dabei haben wir inertielle Koordinaten gewählt. Sei  $I_s$  die Trägheitsabbildung des Systems bezüglich des Schwerpunkts. Wir wählen das inertielle Koordinatensystem so, dass der Schwerpunkt im Koordinatenursprung ruht. Das ist möglich, wenn das Potential  $V$  invariant ist unter Galilei-Boosts, was wir voraussetzen wollen. Darüberhinaus nehmen wir an, dass  $V$  eine homogene Funktion vom Grade  $k$  ist, dass also gilt  $V(\lambda \vec{x}_1, \dots, \lambda \vec{x}_N) = \lambda^k V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)$  für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Zeigen Sie, dass 1 Punkt

$$\text{Spur}(I_s) = 2 \sum_{a=1}^N m_a \vec{x}_a \cdot \vec{x}_a \quad (9)$$

und 2 Punkte

$$\frac{d^2}{dt^2} \text{Spur}(I_s) = 8E - (8 + 4k)V, \quad (10)$$

wobei  $E = T + V$  die (erhaltene) Gesamtenergie ist.

Ist  $V < 0$  und  $k > -2$ , so ist die rechte Seite für Lösungen mit  $E > 0$  echt positiv und somit die Funktion  $t \mapsto \text{Spur}(I_s(t))$  konvex. Beweisen Sie damit folgenden Satz:

Gegeben eine Lösung des Newton'schen Bewegungsproblems für  $N$ -Teilchen zu positiver Energie und negativem Potential vom Homogenitätsgrad  $k > -2$ . Sei  $K$  ein beschränktes Gebiet des Raumes. Dann wird nach endlicher Zeit mindestens ein Teilchen das Gebiet  $K$  verlassen. (Bemerkung:  $k > -2$  schließt den Fall der gravitativen Wechselwirkung ein.)

1 Punkt

#### Aufgabe B4 (5 Bonuspunkte)

Ein mechanisches System sein beschrieben durch die Lagrange-Funktion

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} g_{ab}(q) \dot{q}^a \dot{q}^b - U(q) \quad (11)$$

wobei  $q = (q^1, \dots, q^f)$ .

Das sogenannte *Maupertuis'sche Prinzip der kleinsten Wirkung* (Maupertuis 1747; Leibniz soll es bereits 1707 formuliert haben) besagt, dass die dynamisch mögliche Bahn des Systems zwischen den Endpunkten  $q_0$  und  $q_1$ , deren Energie  $E$  sei, der Bedingung genügt, dass sie unter allen kinematisch möglichen Bahnen gleicher Endpunkte und gleicher Energie die Maupertuis'sche „Wirkung“ (das ist der Ursprung des Begriffs *Wirkung*),

$$W := \int p_a(q, \dot{q}) \dot{q}^a dt \quad (12)$$

minimiert, wobei  $p_a := \partial L / \partial \dot{q}^a$ .

Beachten Sie, dass hier die Vergleichsbahnen wegen der Bedingung gleicher Energie nicht in gleicher Zeit durchlaufen werden können (im Unterschied zum Hamilton'schen Wirkungsprinzip). Zeigen Sie, dass vielmehr  $dt$  durch die  $dq^a$  determiniert ist durch

1 Punkt

$$dt = \sqrt{\frac{g_{ab} dq^a dq^b}{2(E - U)}}. \quad (13)$$

Zeigen Sie weiter, indem Sie damit alle Differentiale  $dt$  in (12) eliminieren, dass das Maupertuis'sche Prinzip die (Jacobi'sche) Form annimmt, gemäß der die dynamisch möglichen Bahnen die stationären Punkte des Funktional

$$W = \int \sqrt{G_{ab}(q(\lambda)) \frac{dq^a(\lambda)}{d\lambda} \frac{dq^b(\lambda)}{d\lambda}} \quad (14a)$$

sind, wobei

1 Punkt

$$G_{ab}(q) := 2(E - U(q)) g_{ab}(q) \quad (14b)$$

Dabei ist  $\lambda$  ein beliebiger Parameter der kinematisch erlaubten Vergleichskurve  $\lambda \mapsto q(\lambda)$ .

Geben Sie eine geometrische Interpretation der Stationaritätsbedingung für (14) an. Diese enthält keine Zeit mehr. Wie aber kann man die tatsächlich vergangene Newton'sche Zeit zurückbekommen, wenn die Lösungskurve zu (14) einmal gefunden ist?

1 Punkt

Stellen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen für die Stationarität des Jacobi-Funktional (14) auf und zeigen Sie, dass Lösungskurven, wenn sie durch  $\lambda = t$  parametrisiert werden, die Euler-Lagrange-Gleichungen für die Lagrange-Funktion (11) erfüllen.

2 Punkte

### Aufgabe B5 (5 Bonuspunkte)

Wir betrachten die Bewegung eines Massenpunktes in der  $xy$ -Ebene unter Einfluss einer nur vom Abstand abhängenden Zentralkraft. Die Bahnkurve stellen wir diesmal durch eine  $\mathbb{C}$ -wertige Funktion  $t \mapsto z(t)$  dar, wobei  $z := x + iy = re^{i\varphi}$ . Das Kraftgesetz für eine mit der  $\alpha$ -ten Potenz des Abstands skalierende Kraft und der Flächensatz lauten dann (wir dividieren gleich durch die Masse;  $c$  ist eine reelle Konstante)

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -c z |z|^{\alpha-1}, \quad (15a)$$

$$|z|^2 \frac{d\varphi}{dt} = \ell = \text{konst.} \quad (15b)$$

Leiten Sie aus (15a) den Energiesatz ab:

1 Punkt

$$E := \frac{1}{2} \left| \frac{dz}{dt} \right|^2 + \frac{c}{\alpha+1} |z|^{\alpha+1} = \text{konst.} \quad (16)$$

Beweisen Sie nun folgenden

2 Punkte

**Satz 1.** *Genügt die Kurve  $t \mapsto z(t)$  den Gleichungen (15) mit Energiewert  $E$ , dann genügt für ein reelles  $r$  die Kurve*

$$\tau \mapsto \zeta(\tau) := z^r(t(\tau)) \quad (17)$$

den entsprechenden Gleichungen

$$\frac{d^2 \zeta}{d\tau^2} = -\gamma \zeta |\zeta|^{\alpha-1}, \quad (18a)$$

$$|\zeta|^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = \ell = \text{konst.} \quad (18b)$$

mit der gleichen Konstanten  $\ell$ , wenn

$$r = \frac{\alpha+3}{2}, \quad \gamma = E \frac{(\alpha+3)(\alpha+1)}{2}, \quad (\alpha+3)(\alpha+3) = 4. \quad (19)$$

*Tipp: Man beachte, dass der neue Kurvenparameter  $\tau$  nicht mit  $t$  übereinstimmt sondern durch die Forderung festgelegt ist, dass der Flächensatz mit gleicher Konstante  $\ell$  gelten soll. Zeigen Sie zuerst, dass daraus folgt*

$$\frac{d}{d\tau} = |z(t)|^{-2(r-1)} \frac{d}{dt}. \quad (20)$$

Werten Sie damit und mit (17)  $d^2 \zeta / d\tau^2$  aus und bringen Sie das Ergebnis unter Benutzung des Energiesatzes (16) in die Form (15a).

Diskutieren Sie das Beispiel  $\alpha = 1$  (zweidimensionaler harmonischer Oszillator) das nach (19) mit  $r = 2$  zu  $\alpha = -2$ , also dem Keplerproblem korrespondiert. Zeigen Sie dazu, dass die komplexe Darstellung einer Ellipse mit Mittelpunkt im Ursprung unter Quadrieren wieder in die Darstellung einer Ellipse übergeht, deren einer Brennpunkt nun im Ursprung liegt.

2 Punkte

*Tipp: Der Kreis  $\hat{z}(\varphi) = R e^{i\varphi} \in \mathbb{C}$  mit  $1 < R = \text{konst.}$  geht unter der Abbildung  $\hat{z} \mapsto z := \hat{z} + 1/\hat{z}$  über in die Ellipse  $z(\varphi) = a \cos(\varphi) + b \sin(\varphi)$  mit großer und kleiner Halbachse  $a = R + R^{-1}$  bzw.  $a = R - R^{-1}$  und Mittelpunkt im Ursprung. Die Brennpunkte liegen also bei  $z = \pm\sqrt{a^2 - b^2} = \pm 2$ . Quadrieren von  $z(\varphi)$  ergibt  $z(\varphi) \mapsto \zeta(\varphi) := z^2(\varphi) = \hat{z}^2(\varphi) + 1/\hat{z}^2(\varphi) + 2$ , also die Darstellung einer um die Strecke  $\Delta z = 2$  verschobenen Ellipse mit Mittelpunkt im Ursprung und Halbachsen  $a' = R^2 + R^{-2}$  bzw.  $b' = R^2 - R^{-2}$ .*