Übungen zur Vorlesung

Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie

von DOMENICO GIULINI

Blatt 10

Aufgabe 1

In der äußeren Schwarzschildgeometrie ($m := GM/c^2$)

$$g = \left(1 - \frac{2m}{R}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) \tag{1}$$

betrachte man eine zeitartige Geodätische $x^\mu(\tau)$ mit $r(\tau) = R =$ konst. und $\theta(\tau) = \pi/2$ (entsprechend Kreisbahnen um das Objekt). Zeigen Sie, dass für diese das 3. Kepler'sche Gesetz in der gewohnten Form gilt:

$$R^3 \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = mc^2 = GM\,. \tag{2}$$

[*Tipp: Geodäten der genannten Art genügen der Bedingung, dass die Langrange-Funktion zum Energiefunktional verschwindende* r*-Ableitung bei* $r = R$ *hat (warum?).*]

Zeigen Sie weiter, dass entlang dieser Geodätischen das Verhältnis von Koordinaten- zu Eigenzeit gegeben ist durch

$$\dot{t} := \frac{dt}{d\tau} = \sqrt{1 - \frac{3m}{R}}\,, \tag{3}$$

so dass das 3. Kepler'sche Gesetz, sofern es auf die Umlauffrequenz bezüglich der Eigenzeit τ statt der Koordinatenzeit t (differentialgeometrisch die „Killing-Zeit“) bezogen wird, die ungewöhnliche Form erhält ($\dot\varphi := d\varphi/d\tau$):

$$R^3 \cdot \dot\varphi^2 = \frac{mc^2}{1 - \frac{3m}{R}}\,. \tag{4}$$

Aufgabe 2

Entlang der in Aufgabe 1 beschriebenen Geodätischen wird ein Vektorfeld $S^\mu(\tau)$ parallel verschoben; d.h. es gilt:

$$\dot S^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\dot x^\alpha S^\beta = 0\,. \tag{5}$$

Da sich bei Parallelverschiebung das Skalarprodukt zwischen S und der Vierergeschwindigkeit $\dot x$ nicht ändert (warum nicht?), ist es konsistent, anzunehmen, dass S senkrecht zu $\dot x$ sei; tun Sie das! Wählen Sie darüberhinaus die Anfangsbedingung so, dass der Vektor anfangs auch eine verschwindende Komponente in θ-Richtung hat und zeigen Sie dann mit Hilfe von (5), dass dies entlang der Bahn so bleibt. Stellen Sie nun gemäß (5) und (1) die Differentialgeichung für die Komponenten S^μ auf und integrieren Sie diese. Zeigen Sie, dass der Vektor S in der zu $\dot{x}$ und ∂_θ senkrechten zweidimensionalen raumartigen Ebene mit der kosnstanten Winkelgeschwindigkeit (bezogen auf die Eigenzeit)

$$\Omega = \omega \cdot \sqrt{1 - \frac{3m}{R}} \tag{6}$$

entgegen der Orientierung der Bahndrehung rotiert, und dass er nach einem vollen Bahnumlauf um den Winkel

$$\Delta\varphi = 2\pi \left[1 - \sqrt{1 - \frac{3m}{R}} \right] \tag{7}$$

im Sinne der Bahndrehung verdreht zurückkommt.

Aufgabe 3

Betrachten Sie eine nicht notwendig inertiale Bewegung eines Objekts im Bereich $0 < r < 2m$ der Metrik (1) und zeigen Sie, dass diese die Singularität $r = 0$ nach einer Eigenzeit trifft, die echt kleiner ist als

$$\tau_* = \frac{\pi m}{c} \,. \tag{8}$$

Wie viel Zeit verbleibt Ihnen also höchstens nach Passieren des Horizonts eines supermassiven schwarzen Lochs von 4 Millionen Sonnenmassen (vergleichbar dem im Zentrum der Milchstraße)?

[*Tipp: Gehen sie aus von der für jede zeitartige Bewegung gültigen Gleichung* $g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = c^2$. *Schreiben Sie diese Bedingung für die Metrik* (1) *im Bereich* $r < 2m$ *an und leiten Sie daraus ab, dass* $\dot{r}^2$ *echt größer ist als* $c^2\big((r/2m) - 1\big)$.]

Aufgabe 4

Nehmen Sie als stark vereinfachtes Modell eines Neutronensterns eine Kugel vom Radius $R = 12\,\mathrm{km}$ und einer Masse M von 1,5 Sonnenmassen an, die homogen mit Neutronen gefüllt ist, von denen jedes eine nukleare Bindungsenergie von $16\,\mathrm{MeV}$ besitzt. Schätzen Sie damit das Verhältnis der gesamten gravitativen Bindungsenergie (berechnet nach der Newton'schen Gravitationstheorie) zur gesamten nuklearen Bindungsenergie ab sowie das Verhältnis beider zu Mc^2. Zeigen Sie dazu zunächst allgemein, dass es bei vorgegebener Massendichte ρ und vorgegebenem Radius R eine kritische Masse M_{krit} gibt, oberhalb der die (mit M^2 anwachsende) gravitative Bindungsenergie die (nur linear in M wachsende) nukleare Bindungsenergie überwiegt. Diese ist von der Größenordnung

$$M_{\text{krit}} \approx \rho^{-1/2} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{G m_N} \right)^{3/2} \,, \tag{9}$$

wobei ε die Bindungsenergie pro Nukleon ist und m_N die Masse des Neutrons.