Übungen zur Vorlesung

Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie

von Domenico Giulini

Blatt 11

Aufgabe 1

Gemäß Vorlesung ist die im linearisierten Gravitationsfeld $h_{\mu\nu}$ quadratische Lagrangedichte gegeben durch

$$\mathcal{L}_G^{(2)} = \frac{1}{2\kappa}\left\{\frac{1}{4}\partial^\gamma h^{\alpha\beta}\partial_\gamma h_{\alpha\beta} - \frac{1}{4}\partial^\alpha h \partial_\alpha h - \frac{1}{2}\partial^\gamma h^{\alpha\beta}\partial_\beta h_{\alpha\gamma} + \frac{1}{2}\partial_\alpha h^{\alpha\beta}\partial_\beta h\right\} . \tag{1}$$

Die quadratische Wirkung $S_G^{(2)}$ ergibt sich daraus durch Integration mit dem Maß $d^3x\, dt = \frac{1}{c} d^4x$.

Machen Sie sich klar, dass die physikalischen Einheiten stimmen und dass auch das Vorzeichen richtig gewählt ist (positive „kinetische Energie“).

Zeigen Sie, dass

$$\frac{\delta S_G^{(2)}}{\delta h^{\alpha\beta}} = \kappa^{-1}\, G_{\alpha\beta}^{(1)} , \tag{2}$$

wobei $G_{\alpha\beta}^{(1)}$ der linearisierte Einstein-tensor ist. Drücken Sie letzteren auch durch das Hilfsfeld $\bar{h}_{\alpha\beta} := h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta} h$ aus.

Berechnen Sie schileßlich aus (1) den Energie-Ipulstensor des linearisierten Gravitationsfeldes nach der (sogenannten „kanonischen“) Vorschrift

$$t^\mu{}_\nu := \frac{\partial \mathcal{L}_G^{(2)}}{\partial\left(\partial_\mu h^{\alpha\beta}\right)}\partial_\nu h^{\alpha\beta} - \delta^\mu_\nu \mathcal{L}_G^{(2)} . \tag{3}$$

Bestimmen Sie damit die die Energiedichte und Energiestromdichte einer ebenen Gravitationswelle in z-Richtung (s. Vorlesung).

Aufgabe 2

Die Metrik der Raum-Zeit habe die Form

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - f^2(t,z)\, dx^2 - g^2(t,z)\, dy^2 - dz^2 . \tag{4}$$

Welche Gleichungen müssen die Funktionen f und g erfüllen, damit diese Metrik die (exakten!) Einsteingleichungen ohne Materie und ohne kosmologische Konstante erfüllt. Gibt es physikalisch interessante Lösungen?

Aufgabe 3

Die gravitative Abstrahlungsleistung eines um den Mittelpunkt mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Stabes (dessen Querdimension gegenüber seiner Längsdimension vernachlässigt werden kann) ist gegeben durch

$$P_{\mathrm{GW}} = \frac{32}{5} \cdot \frac{G}{c^5} \cdot \omega^6 \cdot I'^2 \,. \tag{5}$$

Dabei ist I' das konstante Trägheitsmoment im körperfesten Bezugssystem bei Drehungen um eine zur Stabachse senkrechte Achse durch den Mittelpunkt. Das Trägheitsmoment bei Drehung um die Längsachse sei vernachlässigbar.

Geben Sie I' als Funktion der (homogenen) Massendichte ρ des Stabmaterials, des konstanten Stabquerschnitts q und seiner Länge L an. Berechnen Sie die maximale im Stab auftretende Längsspannung σ_{max}, ebenfalls als Funktion dieser Größen. Zeigen Sie schließlich, dass bei Vorgabe einer maximalen Spannung die Abstrahlungsleistung durch

$$P_{\mathrm{GW}} \leq \frac{2024}{45} \cdot \frac{G}{c^5} \cdot \frac{q^2 \sigma_{\mathrm{max}}^3}{\rho} \tag{6}$$

nach oben beschränkt ist. Wie interpretieren Sie das Auftreten von ρ im *Nenner*, was ja heißt, dass größere Ausbeuten mit spezifisch *leichteren* Materialien zu erzielen sind?

Wie wir in der Vorlesung sehen werden, ist die h_+-Amplitude, die parallel zur Rotationsachse abgestrahlt wird, gegeben durch der Gleichung

$$h_+ = -\frac{4G}{c^4} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{ML^2\omega^2}{12} \cdot \cos(2\omega t) \,, \tag{7}$$

wobei $M = qL\rho$ die Gesamtmasse des Stabes ist. Zeigen Sie, dass diese beschränkt ist durch

$$|h_+| \leq \frac{4}{3} \cdot \frac{L}{r} \cdot \frac{G\sigma_{\mathrm{max}}}{c^4} \,. \tag{8}$$

Interessanterweise hängt dieser Ausdruck nicht von ρ ab. Denken Sie sich Zahlenbeispiele aus. Für Stahl ist $\rho^{\mathrm{Stahl}} = 7{,}85\,\mathrm{g/cm^3}$, $\sigma_{\mathrm{max}}^{\mathrm{Stahl}} = 2100\,\mathrm{N/mm^2}$ und für Glasfaser $\rho^{\mathrm{Glasf.}} = 2{,}5\,\mathrm{g/cm^3}$, $\sigma_{\mathrm{max}}^{\mathrm{Glasf.}} = 4800\,\mathrm{N/mm^2}$. Welche maximalen Geschwindigkeiten erreichen die Stabenden? Finden Sie effektivere Materialien?

Aufgabe 4

Im Krebsnebel befindet sich als Überrest der Supernova SN 1054 der Pulsar PSR 0531+21. Sein Abstand zu uns beträgt etwa $2000\,\mathrm{pc} \approx 6500$ Lichtjahre und seine Pulsperiode ist $T = 3{,}38 \cdot 10^{-2}$ s. Diese vergrößert sich aufgrund Energieverlusts gemäß

$$\dot{T} = 4{,}2 \cdot 10^{-13} \,. \tag{9}$$

Nehmen Sie zunächst an, der Pulsar sei eine homogene Kugel vom Radius $15\,\mathrm{Km}$ mit einer Masse von $1{,}5$ Sonnenmassen. Wie groß ist dann gemäß (9) die zeitliche Änderungsrate $\dot{E}_{\mathrm{rot}}$ der Rotationsenergie? Welche Elliptizität ε müsste ein starrer Körper gleichen Trägheitsmomentes besitzen, damit er bei gleicher Rotationsperiode die entsprechende Leistung an Gravitationswellen abstrahlt? Welche Gravitationswellenamplitude bzw. relative Längenänderung $\Delta\ell/\ell$ würde man dann auf der Erder erwarten?

Verfeinern Sie nun das Modell etwas, in dem Sie annehmen, der Pulsar sei ein Voll-Ellipsoid mit Halbachsen a, b und c,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\,, \tag{10}$$

wobei $c = a$ und $b = a + \delta a$ mit $|\delta a| \ll a$. Berechnen Sie die Trägheitsmomente um die x, y und z-Achse (Hauptträgheitsachsen) und setzen Sie die Elliptizität gleich der oben abgeschätzten. Welchen Höhenunterschied δa müsste demnach die Oberfläche des Pulsars entlang seines Äquators aufweisen? Halten Sie diese für realistisch?

Aufgabe 5

In Bezug auf den Krebsnebel ist es wahrscheinlich, dass sein Energieverlust wesentlich auf magnetische Dipolstrahlung zurückzuführen ist. Für diese ist $\dot{E}_{\text{rot}} \propto \omega^4$. Zeigen Sie: Gilt allgemein $\dot{E}_{\text{rot}} \propto \omega^n$, dann ist

$$\frac{T\,\ddot{T}}{\dot{T}^2} = 3 - n\,. \tag{11}$$

Wie könnte man also im Prinzip (leider bisher nicht praktisch) *durch Beobachtung am System* zwischen dem Energieverlust in magnetische Dipolstrahlung und dem in gravitative Quadrupolstrahlung unterscheiden?