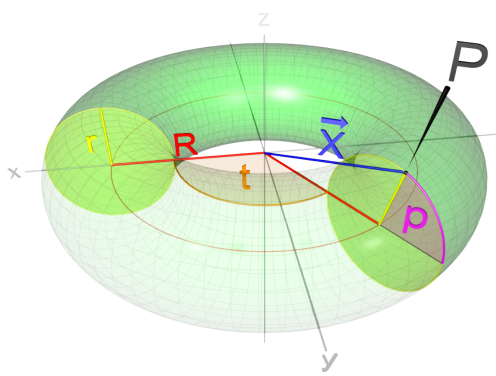
Übungen zur Vorlesung

Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie

von DOMENICO GIULINI

Blatt 3

Aufgabe 1



Das Bild zeigt eine Torusfläche, dessen Mittelkreis wir uns als Kreis vom Radius R in der xy-Ebene um den Ursprung denken. Die Torusfläche besteht dann in einem Schlauch vom Radius $r < R$ um den Mittelkreis. Sie wird durch zwei Winkelkoordinaten $x^1 = t$ (Längengrad) und $x^2 = p$ (Breitengrad) parametrisiert, so dass (wir schreiben, der Vorlesung folgend, $\vec{z}$ statt $\vec{x}$):

$$\vec{z}(t,p) = R\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\\ 0\end{pmatrix} + r\cos p\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\\ 0\end{pmatrix} + r\sin p\,\vec{e}_z = \begin{pmatrix}(R+r\cos p)\cos t\\ (R+r\cos p)\sin t\\ r\sin p\end{pmatrix} \tag{1}$$

Berechnen Sie die Matrix der ersten Fundamentalform (Metrik) gemäß:

$$g_{ab} = \vec{z}_a \cdot \vec{z}_b\,. \tag{2}$$

Wie groß ist der Flächeninhalt der Torusfläche?

Zeigen Sie, dass die Flächennormale gegeben ist durch

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}\cos p\ \cos t\\ \cos p\ \sin t\\ \sin p\end{pmatrix}\,. \tag{3}$$

Berechnen Sie daraus die Matrix L_a^b der Weingarten-Abbildung, indem Sie folgende Gleichung aus der Vorlesung benutzen (wie immer ist $\vec{n}_a := \partial\vec{n}/\partial x^a$):

$$\vec{n}_a := L_a^b\,\vec{z}_b\,. \tag{4}$$

Da diese bereits in Diagonalform ist, können Sie die Eigenwerte der Weingarten-Abbildung einfach ablesen. Zeigen Sie damit, dass die Gauß'sche Krümmung der Torusfläche gegeben ist durch

$$K(t,p) = \frac{\cos p}{R + r\cos p} \cdot \frac{1}{r} \,. \tag{5}$$

Was ergibt die Integration der Gauß'schen Krümmung über die gesamte Torusfläche?

Aufgabe 2

Allgemein hängen die Tangentialvektorfelder $\vec{z}_a := \partial\vec{z}/\partial x^a$ an die durch die Einbettung $\vec{z}(x^1, x^2)$ charakterisierte Fläche von der Wahl der Parameter (x^1, x^2) ab. Zeigen Sie: Sind

$$\bar{J}^{\bar{a}}_a := \frac{\partial \bar{x}^{\bar{a}}}{\partial x^a} \quad \text{und} \quad J^a_{\bar{a}} := \frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^{\bar{a}}} \tag{6}$$

die Jacobi-Matrizen der Transformation

$$(x^1, x^2) \mapsto \big(\bar{x}^1(x^1,x^2), \bar{x}^2(x^1,x^2)\big) \tag{7}$$

bzw. ihrer Inversen, so ist

$$\bar{g}_{\bar{a}\bar{b}}(\bar{x}) = g_{ab}(x)\, J^a_{\bar{a}}(\bar{x})\, J^b_{\bar{b}}(\bar{x}) \tag{8a}$$

$$\bar{g}^{\bar{a}\bar{b}}(\bar{x}) = g^{ab}(x)\, \bar{J}^{\bar{a}}_a(x) \bar{J}^{\bar{b}}_b(x) \,. \tag{8b}$$

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass unter dem in Aufgabe 2 diskutierten Parameterwechsel die 2. Ableitungen der Funktion $\vec{z}$ wie folgt transformieren

$$\vec{z}_{\bar{a}\bar{b}}(\bar{x}) = \vec{z}_{ab}(x) J^a_{\bar{a}}(\bar{x}) J^b_{\bar{b}}(\bar{x}) + \vec{z}_c(x) J^c_{\bar{a}\bar{b}}(\bar{x}) \,, \tag{9}$$

wobei

$$J^c_{\bar{a}\bar{b}} = \frac{\partial J^c_{\bar{a}}}{\partial \bar{x}^{\bar{b}}} = \frac{\partial^2 x^c}{\partial \bar{x}^{\bar{a}} \partial \bar{x}^{\bar{b}}} \,. \tag{10}$$

Benutzen sie nun die K_{ab} und Γ^c_{ab} definierende Gleichung aus der Vorlesung,

$$\vec{z}_{ab} = K_{ab}\vec{n} + \Gamma^c_{ab}\vec{z}_c \,, \tag{11}$$

um folgende Transformationsformeln für die Koeffizientenfunktionen abzuleiten (wir unterdrücken die Argumente x bzw $\bar{x}$, die sinngemäß wie in (8) anzuschreiben wären):

$$\bar{K}_{\bar{a}\bar{b}} = K_{ab}\, J^a_{\bar{a}} J^b_{\bar{b}} \,, \tag{12}$$

und

$$\bar{\Gamma}^{\bar{c}}_{\bar{a}\bar{b}} = \bar{J}^{\bar{c}}_c\, \Gamma^c_{ab}\, J^a_{\bar{a}} J^b_{\bar{b}} + \bar{J}^{\bar{c}}_c J^c_{\bar{a}\bar{b}} \tag{13a}$$

$$= \bar{J}^{\bar{c}}_c \left(\Gamma^c_{ab} - J^c_{\bar{n}} \bar{J}^{\bar{n}}_{ab} \right) J^a_{\bar{a}} J^b_{\bar{b}} \,. \tag{13b}$$

Dabei besteht der Schritt von (13a) nach (13b) lediglich in einem Unschreiben des Inhomogenitätsterms.

Sei p ein Punkt der Fläche an dem die Koordinaten (x^1, x^2) die Werte (x_p^1, x_p^2) annehmen. Führen Sie in der Nachbarschaft von p neue Koordinaten durch

$$\bar{x}^{\bar{c}} = (x^c - x_p^c) + \tfrac{1}{2}\Gamma^c_{ab}(p)\,\big(x^a - x_p^a\big)\big(x^b - x_p^b\big) \tag{14}$$

ein und zeigen Sie mit Hilfe von (13b), dass $\bar{\Gamma}^{\bar{c}}_{\bar{a}\bar{b}}(p) = 0$.

Aufgabe 4

Ein Feld $\vec{v}(x^1, x^2)$ von Tangentialvektoren an die Fläche hat die Entwicklung

$$\vec{v}(x^1, x^2) = v^a(x^1, x^2)\,\vec{z}_a(x^1, x^2)\,. \tag{15}$$

Zeigen Sie, dass unter einem Parameterwechsel (7) die Komponenten des Vektorfeldes wie folgt Transformieren:

$$v^a(x) \to \bar{v}^{\bar{a}}(\bar{x}) = J^{\bar{a}}_a(x)\,v^a(x)\,. \tag{16}$$

Man betrachte nun die Komponenten der so genannten (s.u.) „kovarianten Ableitung“

$$\nabla_a v^c := \frac{\partial v^c}{\partial x^a} + \Gamma^c_{ab}\,v^b\,. \tag{17}$$

Zeigen Sie mit Hilfe von (16) und (13b), dass deren Transformationsgesetz gegeben ist durch (die Argumente x und $\bar{x}$ sind wieder sinngemäß zu ergänzen):

$$\nabla_{\bar{a}} v^{\bar{c}} = \bar{J}^a_{\bar{a}} J^{\bar{c}}_c\,\nabla_a v^c\,. \tag{18}$$

Welche Rolle spielt hierbei der inhomogene Term in (13)?

Aufgabe 5

Eine $p + q$ - fach indizierte Größe $T^{a_1\cdots a_p}_{b_1\cdots b_q}$ bildet die Komponenten eines Tensors der Stufe $\binom{p}{q}$ (man sagt: p-fach kontravariant und q-fach kovariant), wenn sie unter Koordinatenwechsel linear und homogen wie folgt transformieren

$$\bar{T}^{\bar{a}_1\cdots\bar{a}_p}_{\bar{b}_1\cdots\bar{b}_q}(\bar{x}) = J^{\bar{a}_1}_{a_1}(x)\cdots J^{\bar{a}_p}_{a_p}(x)\; T^{a_1\cdots a_p}_{b_1\cdots b_q}(x)\; \bar{J}^{b_1}_{\bar{b}_1}(\bar{x})\cdots \bar{J}^{b_q}_{\bar{b}_q}(\bar{x})\,. \tag{19}$$

Die kovariante Ableitung eines Tensors der Stufe $\binom{p}{q}$ ist definiert durch

$$\begin{aligned}
\nabla_c T^{a_1\cdots a_p}_{b_1\cdots b_q} \;:=\; & \frac{\partial T^{a_1\cdots a_p}_{b_1\cdots b_q}}{\partial x^c} \\
& + \Gamma^{a_1}_{cd} T^{d a_2\cdots a_p}_{b_1\cdots b_q} + \cdots + \Gamma^{a_p}_{cd} T^{a_1\cdots a_{p-1} d}_{b_1\cdots b_q} \quad (p \text{ Summanden}) \\
& - \Gamma^d_{cb_1} T^{a_1\cdots a_p}_{d b_1\cdots b_q} - \cdots - \Gamma^d_{cb_q} T^{a_1\cdots a_p}_{b_1\cdots b_{q-1} d} \quad (q \text{ Summanden})
\end{aligned} \tag{20}$$

Zeigen Sie dann allgemein mit Hilfe von (19) und (13), dass die kovariante Ableitung eines Tensors der Stufe $\binom{p}{q}$ ein Tensor der Stufe $\binom{p}{q+1}$ ist. (Tipp: Verwenden Sie (13b) für die oberen und (13a) für die unteren Indizes.)