Übungen zur Vorlesung

Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie

von DOMENICO GIULINI

Blatt 4

Aufgabe 1

Die Sphäre vom Radius $R = 1$ im $\mathbb{R}^3$ werde dargestellt durch

$$\vec{z}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} R \sin\theta \ \cos\varphi \\ R \sin\theta \ \sin\varphi \\ R \cos\theta \end{pmatrix} . \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass die erste Fundamentalform gegeben ist durch

$$\vec{z}_a \cdot \vec{z}_b \, dx^a \, dx^b = g_{ab} \, dx^a dx^b = R^2 \big(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2 \big) . \tag{2}$$

Bestimmen Sie die Geodätengleichung, indem Sie die Euler-Lagrange-Gleichung des folgenden Energiefunktionals aufstellen:

$$E = \tfrac{1}{2} \int ds \big(R^2 \dot{\theta}^2 + R^2 \sin^2\theta \, \dot{\varphi}^2 \big) . \tag{3}$$

(Hier bezeichnet ein Punkt wie immer die Ableitung nach s.) Bestimmen Sie daraus durch Ablesen die Christoffel-Symbole Γ^c_{ab}. (Hinweis: Nur zwei der sechs Komponenten verschwinden nicht.)

Aufgabe 2

Auf der in Aufgabe 1 betrachteten Sphäre hat ein Breitenkreis auf der nördlichen Hemisphäre ($\theta_0 \leq \pi/2$) die Parameterdarstellung $\big(\theta(\lambda), \varphi(\lambda)\big) = (\theta_0, \lambda)$, wobei $\lambda \in [0, 2\pi]$. Man Bestimme die Holonomie eines einmal um den Breitenkreis parallel verschobenen Vektors durch explizites Lösen der Gleichung

$$\frac{dV^c}{d\lambda} + \Gamma^c_{ab} \frac{dx^a}{d\lambda} V^b = 0 . \tag{4}$$

Zeigen Sie damit, dass der in Bogenmaß gemessene Betrag des Drehwinkels gleich ist dem R^{-2} fachen des Flächeninhalts des Streifens $\theta_0 \leq \theta \leq \pi/2$.

Stellen Sie Sich einen nach unten offenen Kreiskegel vor, dessen Symmetrieachse mit der Polachse der 2-Sphäre zusammenfällt, so dass die (nach oben weisende) Spitze oberhalb des Nordpols auf der Polachse liegt. Der Öffnungswinkel des Kegels sei so, dass der Kegelmantel die Sphäre im nördlichen Breitenkreis $\theta = \theta_0$ berührt. Den Kegelmantel denken Sie Sich so konstruiert, dass Sie die Ebene entlang zweier von einem

Punkt auslaufende Halbgeraden aufschneiden und die entstehenden Ränder identifizieren (zusammenkleben). Der von den Halbgeraden eingeschlossene Winkel sei ϕ. Drücken Sie ϕ durch θ_0 aus. Zeigen Sie, dass das oben erhaltene Resultat für den Drehwinkel auch durch die gewöhnliche Parallelverschiebung eines Vektors auf dem Zylindermantel (d.h. der geschlitzten Ebene) erhalten werden kann.

Aufgabe 3

Beweisen Sie, dass Geodätische auf der Sphäre Segmente von Großkreisen sind. Verbindet man drei nicht auf einem einzigen Großkreis liegende Punkte durch Großkreissegmente (Länge jeweils kleiner als halber Umfang), so erhält man ein sphärisches Dreieck. Zeigen Sie ohne größere Rechnung, insbesondere ohne Lösen von (4), dass ein Vektor nach Paralleltransport entlang aller Seiten des sphärischen Dreiecks um einen Winkel verdreht an den Ausgangspunkt zurückkehrt, der dem Sphärischen Exzess (Winkelsumme im Dreieck in Bogenmaß minus π) entspricht, also wieder dem R^{-2} fachen des umfahrenen Flächeninhalts. (Tipp: Nutzen Sie die in der Vorlesung bewiesenen Sachverhalte, dass 1) das Tangentenvektorfeld entlag einer Geodätischen parallel verschoben ist und dass 2) der Winkel zwischen den Vektoren zweier entlang der gleichen Kurve parallel verschobener Vektorfelder konstant ist.)

Aufgabe 4

Auf einer durch $(x^1, x^2) \in U \subset \mathbb{R}^2$ parametrisierten Fläche mit Einbettungsfunktion $\vec{z}(x^1, x^2)$ betrachten wir wie in der Vorlesung das Normalenfeld

$$\vec{n}(x^1, x^2) := \frac{\vec{z}_1 \times \vec{z}_2}{\|\vec{z}_1 \times \vec{z}_2\|} . \tag{5}$$

Dieses fassen wir auf als Einbettungsfunktion eines durch $U \subset \mathbb{R}^2$ parametrisierten Stücks der Einheits-Zweisphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$.

Zeigen Sie, dass dieses Stück der S^2 den Flächeninhalt

$$A_*(U) = \int d^2x \; \|\vec{z}_1 \times \vec{z}_2\| \; \det\{L^a_b\} \tag{6}$$

besitzt, wobei L^a_b die Komponenten der Weingarten-Abbildung bezüglich der Basis $\{\vec{z}_1, \vec{z}_2\}$ sind.

Zeigen Sie weiter, dass die Gauß'sche Krümmung der Fläche am Punkt $\vec{z}(p)$ mit $p \in U$ gegeben ist durch

$$K(p) = \lim_{U \to p} \left\{ \frac{A_*(U)}{A(U)} \right\} , \tag{7}$$

wobei $A(U)$ der gewöhnliche (siehe Vorlesung) Inhalt des durch $\vec{z}(x^1, x^2)$ eingebetteten Flächenstücks ist und der Limes so zu verstehen ist, dass immer kleinere Umgebungen U des Punktes p genommen werden. Dies liefert eine alternative Interpretation der Gauß'schen Krümmung. Fassen Sie diese in Worte.