Übungen zur Vorlesung

Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie

von DOMENICO GIULINI

Blatt 5

Aufgabe 1

(Achtung: Sie haben es hier mit Distributionen zu tun. $\delta^{(4)}$ bezeichnet die Dirac-Distribution im Minkowskiraum bezüglich des gewöhnlichen Lebesgue-Maßes.)

Die Viererstromdichte einer Punktladung e, die sich auf einer Weltlinie $z(\tau)$ im Minkowskiraum bewegt (τ ist die Eigenzeit), ist gegeben durch

$$j^\mu(x) = e \int d\tau\, \delta^{(4)}\big(x - z(\tau)\big)\dot{z}^\mu(\tau)\,. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass $\partial_\mu j^\mu = 0$ (im Sinne einer Distribution).

Der Energie-Impuls-Tensor einer Punktmasse m, die sich entlang $z(\tau)$ bewegt, ist

$$T^{\mu\nu}(x) = m \int d\tau\, \delta^{(4)}\big(x - z(\tau)\big)\, \dot{z}^\mu(\tau)\dot{z}^\nu(\tau)\,. \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ (im Sinne einer Distribution) genau dann gilt, wenn die Weltline $\ddot{z}^\mu = 0$ genügt, also beschleunigungsfrei ist (d.h. im Minkowskiraum eine Gerade ist).

Aufgabe 2

Sei (V, η) ein reeller $n > 2$ dimensionaler Vektorraum mit Lorentzmetrik (d.h. η ist eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform der Signatur $(1, -1, \cdots, -1)$). Sei $T : V \to V$ eine bezüglich η symmetrische lineare Abbildung, d.h. es gilt $\eta(Tv, w) = \eta(v, Tw)$ für alle $v, w \in V$. Ein Vektor $v \in V - \{0\}$ heißt zeitartig/raumartig/lichtartig falls $\eta(v, v)$ größer/kleiner/gleich Null ist.

Zeigen Sie: Ist $v \in V$ eigenvektor zu T, dann ist auch der $(n-1)$-dimensionale Unterraum $\{v\}^\perp := \{w \in V : \eta(w, v) = 0\} \subset V$ unter T invariant (als Menge, nicht punktweise). Was bedeutet das geometrisch, wenn T einen lichtartigen Eigenvektor besitzt?

Zeigen Sie weiter: Es existiert genau dann eine η-orthogonale Basis von V die T diagonalisiert, wenn T einen zeitartigen Eigenvektor besitzt. (Achtung: Zeigen Sie zunächst, dass eine η-orthogonale Basis keinen lichtartigen Vektor enthalten kann.)

Aufgabe 3

Eine ideale Flüssigkeit wird durch ihre lokale Vierergeschwindigkeit u, ihre lokale Ruhemassendichte ρ und ihren lokalen Druck p beschrieben. Die Vierergeschwindigkeit

u genügt der üblichen Normierungsbedingung $g(u,u) = c^2$. Ihr Energie-Impulstensor ist, in kotravarianten Komponenten (alle Indizes oben), gegeben durch

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p/c^2)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}\,. \tag{3}$$

Die gemischten Komponenten T^μ_ν können wir punktweise als die Komponenten einer linearen Selbstabbildung des Tangentialraumes auffassen. Zeigen Sie deren Diagonalisierbarkeit im Sinne der letzten Aufgabe und bestimmen Sie deren Eigenwerte.

Oft stellt man an T (hier aufgefasst als lineare Abbildung) eine sogenannte *Energiebedingung*. Die gängigsten dieser Bedingungen fordern, dass für jeden zeitartigen Vektor v gilt:

$$\eta(v, Tv) \geq 0 \qquad \text{(schwache Energiebedingung)}, \tag{4a}$$

$$\eta(v, Tv) - \tfrac{1}{2}\eta(v,v)\mathrm{Spur}(T) \geq 0 \qquad \text{(starke Energiebedingung)}, \tag{4b}$$

$$\eta(Tv, Tv) \geq 0 \leq \eta(v, Tv) \qquad \text{(Energiedominanzbedingung)}. \tag{4c}$$

Zeigen Sie, dass angewandt auf eine ideale Flüssigkeit diese Bedingungen äquivalent sind zu:

- Schwache Energiebedingung

$$\rho \geq 0 \quad \text{und} \quad p \geq -\rho c^2\,. \tag{5a}$$

- Starke Energiebedingung

$$p \geq \begin{cases} -\rho c^2/3 & \text{falls } \rho \geq 0, \\ -\rho c^2 & \text{falls } \rho < 0. \end{cases} \tag{5b}$$

- Energiedominanzbedingung

$$\rho \geq 0 \quad \text{und} \quad -\rho c^2 \leq p \leq \rho c^2\,. \tag{5c}$$

Aufgabe 5

Die Bezeichnungen und Verhältnisse seien wie in Aufgabe 2. Wir bezeichnen ferner mit $Z = \{v \in V : \eta(v,v) > 0\} \subset V$ die Menge der zeitartigen Vektoren. Zeigen Sie, dass diese in zwei jeweils konvexe Zusammenhangskomponenten zerfällt, $Z = Z_+ \cup Z_-$, und dass gilt: Ist $n \in Z_+$ und $v \in Z$, dann $v \in Z_\pm \Leftrightarrow \eta(n,v) \gtrless 0$. Zeigen sie weiter, dass die Energiedominanzbedingung (4c) äquivalent der Bedingung ist, dass $T : V \to V$ die Zusammenhangskomponenten $Z_\pm$ jeweils auf sich abbildet. Wegen der Stetigkeit der Abbildung T gilt dies dann auch für deren Abschlüsse $\bar{Z}_\pm$. Sei $\{e_0, e_1, \cdots, e_{n-1}\}$ eine bezüglich η orthonormierte Basis von V mit zeitartigem e_0. Beweisen Sie nun, dass die Energiedominanzbedingung folgende Ungleichungen impliziert

$$T_{00} \geq |T_{ab}| \tag{6}$$

für alle $a, b \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$, wobei $T_{ab} := \eta(e_a, Te_b)$. Tipp: Betrachten Sie Ausdrücke der Form $\eta\big(e_0 \pm e_a, T(e_0 \pm e_b)\big)$ und $\eta\big(e_0, T(e_0 \pm e_a)\big)$. Kann man auch umgekehrt schließen, dass aus der Gültigkeit von (6) bezüglich einer fest gewählten η-orthonormierten Basis die Energiedominanzbedingung folgt?

Aufgabe 6

Zeigen Sie, dass für einen Energie-Impulstensor der Form (3) die Bedingung der kovarianten Divergenzfreiheit, $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, äquivalent ist den beiden Gleichungen

$$\nabla_\mu(\rho u^\mu) + (p/c^2)\nabla_\mu u^\mu = 0\,, \tag{7a}$$

$$(\rho + p/c^2)a^\mu = \pi^\mu_\nu \nabla^\nu p\,. \tag{7b}$$

Dabei sind $a^\mu := u^\nu \nabla_\nu u^\mu$ die Komponenten der Viererbeschleunigung und

$$\pi^\mu_\nu := \delta^\mu_\nu - c^{-2} u^\mu u_\nu \tag{8}$$

die Komponenten der Projektionsabbildung, die parallel zu u auf die zu u senkrechte Ebene projiziert (in jedem Tangentialraum).