Übungen zur Vorlesung

Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie

von DOMENICO GIULINI

Blatt 6

Aufgabe 1

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass man für die um den Minkowskiraum linearisierte Metrik $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ die *de Donder'sche Eichbedingung*

$$\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \tag{1}$$

stellen kann. Dabei ist

$$\bar{h}_{\mu\nu} := h_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \tag{2}$$

mit $h := \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$.

Zeigen Sie, dass unter den in der Vorlesung angegebenen Eichtransformationen das Feld $\bar{h}_{\mu\nu}$ wie folgt transformiert:

$$\bar{h}_{\mu\nu} \to \bar{h}'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \partial_\mu\Lambda_\nu + \partial_\nu\Lambda_\mu - \eta_{\mu\nu}\partial^\lambda\Lambda_\lambda\,. \tag{3}$$

Zeigen Sie weiter, dass die mit der Bedingung (1) verträglichen Eichtransformationen genau die sind, die

$$\Box\Lambda_\mu = 0 \tag{4}$$

erfüllen.

Zeigen Sie nun folgendes wichtiges Resultat: Ist $h_{\mu\nu}$ eine Lösung der linearisierten Einsteingleichungen mit verschwindender Quelle (Vakuumlösung, $T_{\mu\nu} = 0$), die ausserdem (1) genügt, dann kann man die verbleibenden Eichtransformationen (in denen also Λ_μ der Gleichung (4) genügt) dazu benutzen, folgende weitere Bedingungen zu erfüllen:

$$\eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu} = 0\,, \tag{5a}$$

$$v^\mu h_{\mu\nu} = 0\,. \tag{5b}$$

Dabei sind v^μ die Komponenten eines festen zeitartigen Vektors im Minkowskiraum. Wie viele unabhänngige Komponenten pro Punkt in Fourierraum besitzt also $\tilde{h}_{\mu\nu}$ in Anbetracht aller Bedingungen (1) und (5)?

Tipp: Betrachten Sie die Fouriertransformierten aller Felder uns stellen Sie zunächst fest, dass ein Feld F die Gleichung $\Box F = 0$ genau dann erfüllt, wenn die Fouriertransformierte $\tilde{F}$ ihren Träger auf dem Lichtkegel hat. Drücken Sie nun (3) durch die Fouriertransformierten $\tilde{\bar{h}}_{\mu\nu}$ und $\tilde{\Lambda}_\mu$ der Felder $\bar{h}_{\mu\nu}$ und Λ_μ aus und stellen Sie für diese die Bedingungen (5). Zeigen Sie schließlich, dass diese eine eindeutige Auflösbarkeit nach den $\tilde{\Lambda}_\mu$ erlauben. Geben Sie letztere explizit an. Warum kann man die Bedingungen (5) nur außerhalb des Trägers von $T_{\mu\nu}$ stellen (also im Vakuum)? Warum ist (5b) i.A. nur für zeitartige Vektoren v erfüllbar? Führen Sie die analoge Diskussion für die Maxwell-Theorie durch (das ist nun sehr einfach).

Aufgabe 2

Seien $x^\mu(s)$ die Koordinatenfunktionen einer lichtartigen Geodätischen bezüglich der statischen Metrik ($x^0 = ct$)

$$ds^2 = f^2\,(dx^0)^2 - h_{ab}\,dx^a dx^b\,, \tag{6}$$

d.h. sie genügen (ein Punkt bezeichnet die Ableitung nach s)

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\,\dot{x}^\alpha\,\dot{x}^\beta = 0 \tag{7}$$

und

$$g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\,\dot{x}^\beta = 0\,. \tag{8}$$

Die Koeffizientenfunktionen f und h_{ab} hängen von der Zeitkoordinate t nicht ab. Ferner sei die Funktion f im betrachteten Gebiet überall positiv und die symmetrische Matrix h_{ab} überall positiv definit.

Rechnen Sie nach, dass

$$\Gamma^m_{ab} = \tfrac{1}{2}h^{mn}\big(-\partial_n h_{ab} + \partial_b h_{na} + \partial_a h_{bn}\big)\,, \tag{9a}$$

$$\Gamma^0_{ab} = \Gamma^a_{0b} = \Gamma^0_{00} = 0\,, \tag{9b}$$

$$\Gamma^0_{0a} = \frac{\partial_a f}{f}\,, \tag{9c}$$

$$\Gamma^a_{00} = h^{ab} f \partial_a f\,, \tag{9d}$$

wobei h^{ab} die zu h_{ab} inverse Matrix ist.

Zeigen Sie, dass die $\mu = 0$ Komponente der Geodätengleichung (7) äquivalent ist zu

$$f^2\big(\vec{x}(s)\big)\dot{x}^0(s) = k = \text{konst} \tag{10}$$

wobei wir o.B.d.A. die Konstante $k > 0$ annehmen dürfen. Diese Gleichung erlaubt die Ableitungen nach s durch Ableitungen nach $t = x^0/c$ zu ersetzen, die wir durch einen Strich bezeichnen.

Zeigen Sie nun, dass die x^a als Funktionen von t die Geodätengleichung

$$x''^m + \tilde{\Gamma}^m_{ab}\,x'^a\,x'^b = 0 \tag{11}$$

erfüllen, wobei die $\tilde{\Gamma}^m_{ab}$ in der üblichen Weise Funktionen der *optischen Metrik* sind:

$$\tilde{h}_{ab} := \frac{h_{ab}}{f^2}\,. \tag{12}$$

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass daraus die Verallgemeinerung des Fermat'schen Prinzips der kürzesten Lichtlaufzeit für statische Gravitationsfelder folgt. Was besagt dieses Prinzip genau?

Aufgabe 3

Sei $\{x^\mu\}$ ein geodätisches Normalkoordinatensystem um den Punkt p der Raumzeit; d.h. es gilt $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(p) = 0$, was äquivalent ist zu $\partial_\lambda g_{\mu\nu}(p) = 0$. Zeigen Sie, dass bezüglich diesem Koordinatensystem die Komponenten des kovarianten (d.h. alle Indizes unten) Krümmungstensors $R_{\alpha\beta\mu\nu} := g_{\alpha\lambda} R^\lambda{}_{\beta\mu\nu}$ durch folgende Formel gegeben sind (wir schreiben $\partial^2_{\alpha\beta} := \partial_\alpha \partial_\beta$ etc.):

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \tfrac{1}{2}\left(-\partial^2_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - \partial^2_{\beta\nu} g_{\alpha\mu} + \partial^2_{\alpha\nu} g_{\beta\mu} + \partial^2_{\beta\mu} g_{\alpha\nu}\right). \tag{13}$$

Leiten Sie daraus die in jedem Koordinatensystem gültigen Symmetrierelationen ab

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}\,, \tag{14}$$

$$3\,R_{\alpha[\beta\mu\nu]} = R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0\,. \tag{15}$$

Gleichung (15) nennt man auch die *erste Bianchi-Identität*. Zeigen Sie weiter mit (13) die Relation

$$\partial_\lambda R_{\alpha\beta\mu\nu}(p) + \partial_\mu R_{\alpha\beta\nu\lambda}(p) + \partial_\nu R_{\alpha\beta\lambda\mu}(p) = 0\,. \tag{16}$$

Diese Relation gilt nur am Punkt p und auch dort nur im Normalkoordinatensystem. Begründen Sie, warum trotzdem damit bereits folgende, in jedem Koordinatensystem (und an jedem Punkt) gültige Relation bewiesen ist (sog. *zweite Bianchi-Identität*):

$$\nabla_\lambda R_{\alpha\beta\mu\nu} + \nabla_\mu R_{\alpha\beta\nu\lambda} + \nabla_\nu R_{\alpha\beta\lambda\mu} = 0\,. \tag{17}$$

Leiten Sie daraus nochmals ab (s. Vorlesung), dass

$$\nabla^\mu\left(R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} R\right) = 0\,. \tag{18}$$

Aufgabe 4

Seien h und k zwei symmetrische kovariante Tensoren vom Rang 2 über einem Vektorraum der Dimension n. Aus ihnen kann man mit Hilfe des *Kulkarni-Nomizu-Produktes* $\owedge$ einen kovarianten Tensor vom Rang 4 bilden gemäß

$$(h \owedge k)_{\alpha\beta\mu\nu} := h_{\alpha\mu} k_{\beta\nu} + h_{\beta\nu} k_{\alpha\mu} - h_{\alpha\nu} k_{\beta\mu} - h_{\beta\mu} k_{\alpha\nu}\,. \tag{19}$$

Zeigen Sie, dass dieser alle Symmetrien des Riemann-Tensors besitzt.

Auf dem Raum der Tensoren vom Rang 4 definiert man mit Hilfe der Metrik g eine lineare Abbildung, genannt *Weyl-Projektion*, durch

$$P_W(\mathrm{Riem}) = \mathrm{Riem} - \frac{g}{n-2} \owedge \left(\mathrm{Ric} - \frac{g\,R}{2(n-1)}\right). \tag{20}$$

Dabei steht hier Riem zunächst für einen beliebigen Tensor vom Rang 4 (Komponenten $R_{\alpha\beta\mu\nu}$), Ric für dessen erste Spur (Komponenten $R_{\alpha\beta} = g^{\mu\nu} R_{\mu\alpha\nu\beta}$) und R für dessen zweite Spur ($R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$). Zeigen Sie, dass die Tensoren im Bild von P_W vollständig Spurfrei sind und dass der Kern der Abbildung P_W genau durch Tensoren der Form $g \owedge k$ gegeben ist. Zeigen Sie damit $P_W \circ P_W = P_W$ und $\dim \mathrm{Bild}(P_W) = \frac{1}{12} n(n+1)\left[n(n-1) - 6\right]$.

Aufgabe 5

In der Vorlesung wurden zwei Metriken g und $\tilde{g}$ als *konform äquivalent* erklärt, wenn es eine glatte, reellwertige Funktion Ω gibt, mit

$$\tilde{g} = \exp(2\Omega)\, g\,. \tag{21}$$

Zeigen Sie, dass die zu $\tilde{g}$ bzw. g gehörigen Christoffelsymbole wie folgt in Beziehung stehen:

$$\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} + \left(-g^{\mu\nu} g_{\alpha\beta} \Omega_{,\nu} + \delta^{\mu}_{\alpha} \Omega_{,\beta} + \delta^{\mu}_{\beta} \Omega_{,\alpha}\right). \tag{22}$$

Zeigen Sie mit Hilfe von Normalkoordinaten folgende Relation der Riemann-Tensoren

$$\tilde{R}_{\alpha\beta\mu\nu} = \exp(2\Omega) \Big[R_{\alpha\beta\mu\nu} + (g \owedge K)_{\alpha\beta\mu\nu} \Big]\,, \tag{23}$$

mit

$$K_{\alpha\beta} = -\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}\Omega + \nabla_{\alpha}\Omega\nabla_{\beta}\Omega - \tfrac{1}{2} g_{\alpha\beta}\, g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}\Omega\nabla_{\nu}\Omega\,. \tag{24}$$

Der *Weyl-Tensor* ist definiert als das Bild des Riemann-Tensors unter der in (20) definierten Weyl-Projektion. Man bezeichnet seine Komponenten mit $C_{\alpha\beta\mu\nu}$. Zeigen Sie, dass sich diese unter konformen Transformationen wie folgt verhalten:

$$\tilde{C}_{\alpha\beta\mu\nu} = \exp(2\Omega)\, C_{\alpha\beta\mu\nu}\,, \quad \text{bzw.} \quad \tilde{C}^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = C^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}\,. \tag{25}$$

Aufgabe 6

Gehen Sie von der (relativ leicht zu beweisenden) Tatsache aus, dass jede sphärisch symmetrische Metrik des dreidimensionalen Raumes (das folgende Argument funktioniert analog in jeder Dimension) auf die folgende Form gebracht werden kann:

$$ds^2 = f^2(r)\, dr^2 + g^2(r)\big(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\big)\,. \tag{26}$$

Denken Sie sich r als Funktion einer anderen Radiuskoordinate r_*. Zeigen Sie: Erfüllt diese Funktion die Differentialgleichung

$$\frac{dr}{dr_*} = \frac{g\big(r(r_*)\big)}{f\big(r(r_*)\big)\, r_*} \tag{27}$$

so ist die obige Metrik ausgedrückt in den Koordinaten (r_*, θ, φ) von der konform flachen Form

$$ds^2 = h^2(r_*)\big(dr_*^2 + r_*^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)\big) \tag{28}$$

mit $h(r_*) = g\big(r(r_*)\big)/r_*$. Damit ist explizit nachgewiesen, dass jede sphärisch-symmetrische Metrik konform flach ist.