Übungen zur Vorlesung

Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie

von DOMENICO GIULINI

Blatt 8

Aufgabe 1

Man betrachte eine allgemeine stationäre Metrik in angepassten Koordinaten $\{x^0, x^1, x^2, x^3\}$, in denen also alle Koeffizienten $g_{\mu\nu}$ von der Koordinate x^0 unabhängig sind. x^0 sei eine Zeitkoordinate, was bedeutet, dass $g_{00} > 0$. In diesen Koordinaten seien u^μ die Komponenten der Vierergeschwindigkeit eines am festen Raumpunkt $\vec{x}$ verharrenden Beobachters (statinärer Beobachter). Dann ist

$$u^0 = c\,(g_{00})^{-1/2}\,, \quad u^a = 0\;(a = 1, 2, 3)\,. \tag{1}$$

Die Viererbeschleunigung des Beobachters ist definiert durch

$$a^\mu := u^\lambda \nabla_\lambda u^\mu = u^\lambda(\partial_\lambda u^\mu + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} u^\nu)\,. \tag{2}$$

Zeigen Sie durch ausrechnen der rechten Seite von (2) mit Hilfe von (1) und der Definition der Γ-Symbole als Funktion der $g_{\mu\nu}$ und ihrer ersten Ableitungen, dass die Beschleunigung gegeben ist durch den nagativen Vierer-Gradiente der Funktion $\phi =: c^2 \ln\left(\sqrt{g_{00}}\right)$, d.h.

$$a^\mu = -g^{\mu\nu}\partial_\nu \phi\,, \tag{3}$$

und dass der Betrag der Beschleunigung bei Annäherung an Nullstellen von g_{00} divergiert. Was bedeutet das? Können Sie den ganzen Sachverhalt geometrisch und ohne Verwendung eines Koordinatensystems formulieren? Warum nennt man wohl die Nullstellenmenge von g_{00} einen Killing-Horizont?

Aufgabe 2

Betrachten Sie die statische, sphärisch-symmetrische Metrik

$$ds^2 = e^{2a(r)}c^2\,dt^2 - e^{2b(r)}\,dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2)\,. \tag{4}$$

Berechnen Sie alle nicht-verschwindenden Komponenten $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$. (Tipp: Am effektivsten ist es, die Gleichung einer Geodätischen durch Variation des Energiefunktionals aufzustellen und aus dieser alle $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ einfach abzulesen.)

Betrachten Sie weiter den Energie-Implustensor für ein ideales Fluid, wobei es für die folgende Rechnung günstig ist, seine gemischen Komponenten (ein Index oben der andere unten) anzuschreiben:

$$T^\mu_\nu = (\rho + p/c^2)u^\mu u_\nu - \delta^\mu_\nu\,p\,. \tag{5}$$

Nehmen Sie an, dass sich die Flüssigkeit in dem durch (r, θ, φ) parametrisierten Raum ruht (d.h. $u^0 = c\, e^{-a}, u^r = u^\theta = u^\varphi = 0$) und die Ruhemassendichte ρ und der Druck p nur von r abhängen. Werten Sie damit die vier Gleichungen ($\nu = 0, 1, 2, 3$)

$$\nabla_\mu T^\mu_\nu = \partial_\mu T^\mu_\nu + \Gamma^\mu_{\mu\lambda} T^\lambda_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} T^\mu_\lambda = 0 \tag{6}$$

in der Geometrie (4) aus. (Tipp: Die beiden Γ-Terme der rechten Seite sind einfacher auszurechnen als es zunächst den Anschein hat. Z.B. ist $\Gamma^\mu_{\mu\lambda} = g^{-1/2}\partial_\lambda g^{1/2}$, wo $g := \det\{g_{\alpha\beta}\}$.) Zeigen Sie, damit, dass (6) äquivalent sind zu (ein Strich bezeichnet die partielle Ableitung nach r)

$$p' + a'(p + c^2\rho) = 0\,. \tag{7}$$

Aufgabe 3

In der äußeren Schwarzschildgeometrie, deren Gültigkeit für $r > r_S$ hier vorausgesetzt sein soll, ruhe ein Beobachter relativ zu den Schwarzschildkoordinaten bei $r = R > r_S$. Diejenigen Nullgeodätischen seines Rückwärtslichtkegels, die bei Rückverfolgung ein Gebiet beschränkter r-Werte nicht verlassen, nennt man den „Schatten“ des Zentralobjektes. Begründen Sie diese Terminologie.

Zeigen Sie, dass der Schatten im vorliegenden Fall ein Kreiskegel mit Öffnungswinkel α (Winkel zwischen Symmetrieachse und Kegelmantel) füllt, wobei

$$\sin\alpha = \sqrt{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{r_S}{R} \cdot \sqrt{1 - \frac{r_S}{R}}\,. \tag{8}$$

Diskutieren Sie die Veränderung des Schattens als Funktion des Radius' r, wenn Sie sich von Werten $r > 3r_S/2$ kommend über $r = 3r_S/2$ dem Wert $r = r_S$ nähern. Was passiert bei $r = r_S$?

Anleitung: Um (8) abzuleiten benutzen Sie die in der Vorlesung besprochene Methode des effektiven Potentials. Für lichtartige Geodätische gilt:

$$\dot{r}^2 + \underbrace{\left(1 - \frac{r_S}{r}\right) \cdot \frac{\ell^2}{r^2}}_{V_{\text{eff}}(r)} = C\,, \tag{9}$$

mit

$$\ell = r^2\dot{\varphi}\,. \tag{10}$$

Ein Punkt bezeichnet stets die Ableitung nach dem gewählten affinen Parameter. C und ℓ sind entlang einer jeden Bahn konstant.

Betrachten Sie nun einen Lichtstrahl, der mit einem Winkel α zur nach innen orientierten radialen Richtung beim Radius $r = R$ abgeschossen werde. Machen Sie sich klar, dass die Radialkomponente seiner Anfangsgeschwindigkeit folgender Gleichung genügt:

$$\dot{r}|_{r=R} = -\frac{\ell}{R} \cdot \sqrt{1 - \frac{r_S}{R}} \cdot \cot\alpha\,. \tag{11}$$

Bestimmen Sie damit die Konstante C in (9) und dann den Grenzwinkel α, für den die Bewegung das Maximum von V_{eff} bei $r = 3r_S/2$ überschreitet (falls $R > 3r_s/2$) bzw. nicht überschreitet (falls $R < 3r_s/2$).

Aufgabe 4

Die Bewegung einer Punktmasse in einer durch die Polarkoordinaten (r, φ) paranmetrisierten Ebene genüge den folgenden Gleichungen (Energie und Impulserhaltung in der Newton'schen Mechanik)

$$\tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + V(r) = E\,, \tag{12a}$$

$$mr^2\dot{\varphi} = L\,, \tag{12b}$$

wobei E und L Konstante sind und ein Punkt die Ableitung nach einem nicht weiter spezifizierten Kurvenparameter bezeichnet. V sei eine Funktion von r die so beschaffen ist, dass das effektive Potential,

$$V_{\text{eff}}(r) := V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}\,, \tag{13}$$

ein Minimun besitzt. Wir betrachten solche Bahnen mit $L > 0$, für die die Radialbewegung perodisch um dieses Minimum oszilliert und dabei periodisch zwischen zwei Extremwerten $r_{\min}$ und $r_{\max}$ des Radius' pendelt. Zwischen zwei Extremwerten kann r als Funktion von φ aufgefasst werden.

Beweisen Sie, dass der zwischen zwei aufeinanderfolgenden Durchgängen $r = r_{\min}$ zurückgelegte Polarwinkel (nicht mod 2π genommen) gegeben ist durch

$$\begin{aligned}\bar{\varphi} &= 2\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr\, L/r^2}{\sqrt{2m(E - V(r)) - L^2/r^2}} \\ &= -2\frac{\partial}{\partial L}\Big|_E \left\{ \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} dr\, \sqrt{2m(E - V(r)) - L^2/r^2} \right\}\,.\end{aligned} \tag{14}$$

Dieser ist i.A. nicht gleich 2π, außer etwa für der Kepler-Fall $V(r) \propto -1/r$. Beachten Sie, dass der Term in den geschweiften Klammern als Funktion von L und E aufgefasst wird, so dass die partielle Ableitung nach L bei konstantem E auszuführen ist.

Nehmen Sie nun an, $V(r)$ entstehe aus der „Störung" eines anderen Potentials V_*,

$$V(r) = V_*(r) + \Delta V(r)\,, \tag{15}$$

mit $|\Delta V(r)| \ll |V_*(r)|$ für alle $r \in [r_{\min}, r_{\max}]$. Zeigen Sie, dass in führender Ordnung in ΔV die Änderung $\Delta\bar{\varphi} := \bar{\varphi} - \bar{\varphi}_*$ gegenüber dem Winkel $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_*$ für das ungestörte Problem durch folgende, sehr nützliche Formel ausgedrückt werden kann:

$$\Delta\bar{\varphi} = m\frac{\partial}{\partial L}\Big|_E \left\{ \frac{1}{L}\int_0^{2\pi} d\varphi\; r_*^2(\varphi; E, L)\,\Delta V(r_*(\varphi; E, L)) \right\}\,. \tag{16}$$

Hier ist $r_*(\varphi; E, L)$ die Bewegung im ungestörten Potential V_* zu den Werten E und L von Energie und Drehimpuls.