Übungen zur Vorlesung

Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie

von Domenico Giulini

Blatt 9

Aufgabe 1

Für einen statischen Stern vom Radius R und konstanter räumlicher Massendichte ρ_0 lautet gemäß Vorlesung die vollständige Metrik (äußere und innere Schwarzschildlösung)

$$g = e^{2a(r)}\, c^2 dt^2 - e^{2b(r)}\, dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)) \tag{1a}$$

mit

$$e^{2a(r)} = \begin{cases} \frac{1}{4}\left[3\sqrt{1-\frac{r_S}{R}} - \sqrt{1-\frac{r^2 r_S}{R^3}}\right]^2 & \text{für } r \leq R \\ 1-\frac{r_S}{r} & \text{für } r \geq R \end{cases} \tag{1b}$$

$$e^{2b(r)} = \begin{cases} \left[1-\frac{r^2 r_S}{R^3}\right]^{-1} & \text{für } r \leq R \\ \left[1-\frac{r_S}{r}\right]^{-1} & \text{für } r \geq R \end{cases} \tag{1c}$$

und der üblichen Abkürzung

$$r_S := \frac{2GM}{c^2}\,. \tag{1d}$$

Zeigen Sie, dass die durch $t = 0$ und $r < R$ charakterisierte Region, also das Innere des Sterns zu einem festen Zeitpunkt (hier willkürlich als $t = 0$ gewählt), isometrisch ist zu einer Kalotte (oder Kappe) einer dreidimensionalen Sphäre (mit der üblichen „runden“ Geometrie) vom Radius

$$R_* = R \cdot \sqrt{\frac{R}{r_S}}\,, \tag{2}$$

wobei der Basisradius der Kalotte gleich ist dem Sternradius R, entsprechend einer Kalottenhöhe von

$$h = R \cdot \sqrt{\frac{R}{r_S}} \cdot \left[1 - \sqrt{1-\frac{r_S}{R}}\right]\,. \tag{3}$$

Zeigen Sie, dass Letztere $h < R/\sqrt{2}$ genügt falls $R < 9r_S/8$ (Buchdahl-Grenze).

Tipp: Die Metrik einer 3-Sphäre vom Radius R_* ist in 3-dimensionalen Polarkoordinaten gegeben durch $ds^2 = R_*^2\big[d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)\big]$. Ersetzen Sie χ durch die Koordinate $r := R_* \sin\chi$ und vergleichen Sie mit dem räumlichen Teil von (1) für $r < R$. Der Rand der Kalotte entspricht dem Rand des Sterns $r = R$, woraus sich ihre Höhe elementargeometrisch ergibt.

Aufgabe 2

Die (akive) gravitative Gesamtmasse des durch die Lösung (1) beschriebenen Sterns ist M. Diese hängt gemäß Ableitung (s. Vorlesung) mit der Massendichte so zusammen:

$$M := M(r = R) := 4\pi \int_0^R dr'\, r'^2\, \rho(r') = \frac{4\pi}{3} R^3\, \rho_0\,. \tag{4}$$

Im Unterschied dazu besitzt die im Stern enthaltene Materie für sich genommen (also ohne ihren gravitatiben Bindungszustand zu berücksichtigen) eine Gesamtmasse M_*, die sich durch Integration der Massendichte ρ über das Volumen des Sterns ergibt, wobei letzteres mit Hilfe der räumlichen Geometrie aus (1) zu berechnen ist.

Zeigen Sie, dass

$$M_* = M \cdot F\big(\sqrt{r_S/R}\big)\,, \tag{5a}$$

wobei

$$F(x) := \frac{3}{2} \cdot \frac{\arcsin(x) - x \cdot \sqrt{1 - x^2}}{x^3}\,. \tag{5b}$$

Zeigen Sie weiter, dass in einer Potenzreihenentwicklung nach r_S/R gilt

$$\begin{aligned}
M - M_* &= -\,M_* \cdot \left(1 - \frac{1}{F\big(\sqrt{r_S/R}\big)}\right) \\
&= -\,M_* \cdot \left(\frac{3}{10} \cdot \left(\frac{r_S}{R}\right) + \frac{99}{1400} \cdot \left(\frac{r_S}{R}\right)^2 + \frac{1459}{42\,000} \cdot \left(\frac{r_S}{R}\right)^3 + \cdots\right) \qquad (6a) \\
&= -\,M \cdot \left(F\big(\sqrt{r_S/R}\big) - 1\right) \\
&= -\,M \cdot \left(\frac{3}{10} \cdot \left(\frac{r_S}{R}\right) + \frac{9}{56} \cdot \left(\frac{r_S}{R}\right)^2 + \frac{5}{48} \cdot \left(\frac{r_S}{R}\right)^3 + \cdots\right)\,. \qquad (6b)
\end{aligned}$$

Zeigen Sie damit, dass die Bindungsenergie $\Delta E := c^2(M - M_*)$ in führender Ordnung (linear in G) dem Newton'schen Wert entspricht.

Wie groß wird der Massendefekt $(M - M_*)/M_*$ an der Buchdahl-Grenze $R = 9r_S/8$? Wie groß ist der Fehler, den man begangen hätte, wenn man den Massendefekt auf Grund des Newton'schen Ausdrucks für die Bindungsenergie berechnet hätte?

Tipp: Die Aufforderung, die Taylor-Entwicklungen von (5b) *bis zur 6. Ordung nachzurechnen, war nicht wirklich ernst gemeint. Es ist:*

$$\begin{aligned}
F(x) &= 1 + \tfrac{3}{10}\, x^2 + \tfrac{9}{56}\, x^4 + \tfrac{5}{48}\, x^6 + O(x^8)\,, \qquad (7a) \\
\frac{1}{F(x)} &= 1 - \tfrac{3}{10}\, x^2 - \tfrac{99}{1400}\, x^4 - \tfrac{1459}{42\,000}\, x^6 + O(x^8)\,. \qquad (7b)
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Die *optische* Metrik des Raums $t = \text{konst.}$ der äußeren Schwarzschildgeometrie ist

$$ds^2 = \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^2} + \frac{r^2}{1 - \frac{r_s}{r}} \left(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2\right). \tag{8}$$

Berechnen Sie den radialen geodätischen Abstand eines Punktes mit $r > r_S$ zur Fläche $r = r_S$. Welcher wesentliche Unterschied besteht zum räumlichen Teil der Schwarzschildmetrik?

Zeigen Sie, dass die Sphären $r = \text{konst.}$ in der optischen Geometrie den Flächeninhalt

$$O(r) = \frac{4\pi r^2}{1 - \frac{r_s}{r}} \tag{9}$$

besitzen und dass unter ihnen genau eine Sphäre kleinsten Inhalts ist. Berechnen Sie deren Flächeninhalt in der optischen und in der räumlichen Schwarzschildgeometrie und vergleichen Sie diese. Skizzieren Sie nun qualitativ ein Einbettungsdiagramm des äquatorialen Schnitts $\theta = \pi/2$ für die optische Metrik im Bereich $r \in (r_s, \infty)$.

Aufgabe 4

Bringen Sie durch Einführung einer neuen Radialkoordinate r_* gemäß Aufgabe 6 von Blatt 6 die äußere Schwarzschildmetrik in eine manifest räumlich konform-flache Gestalt. Geben Sie dazu durch Lösen von Gl. (27) auf Blatt 6 die Radialkoordinate r als Funktion von r_* explizit an und zeigen Sie damit, dass die äußere Schwarzschildmetrik die folgende Gestalt bekommt:

$$ds^2 = \left[\frac{1 - \frac{r_{*S}}{r_*}}{1 + \frac{r_{*S}}{r_*}}\right]^2 c^2 \, dt^2 - \left[1 + \frac{r_{*S}}{r_*}\right]^4 \left(dr_*^2 + r_*^2\left(d\theta^2 + \sin\theta^2 \, d\varphi^2\right)\right) \tag{10}$$

Dabei ist $r_{*S} = r_S/4$. Wir interessieren uns im Folgenden nur für den räumlichen Teil dieser Metrik auf der Untermannigfaltigkeit $t = 0$.

Diskutieren Sie die Abbildung $r_* \mapsto r$. Zeigen Sie, dass jedem Wert $r \in (r_S, \infty)$ zwei r_*-Werte entsprechen, die durch die Inversion $r_* \mapsto r_{*S}^2/r_*$ miteinander zusammenhängen. Dem Wert r_S entspricht hingegen eindeutig $r_* = r_{*S} = r_S/4$. Zeigen Sie damit, dass die durch (r_*, θ, φ) mit $r_* \in (0, \infty)$ parametrisierte Mannigfaltigkeit eine verzweigte Überlagerung der durch (r, θ, φ) mit $r_* \in [r_S, \infty)$ parametrisierten Mannigfaltigkeit ist, und dass die Inversionstransformationen

$$I_1 : (r_*, \theta, \varphi) \mapsto (r_{*S}^2/r_*, \theta, \varphi) \tag{11a}$$

$$I_2 : (r_*, \theta, \varphi) \mapsto (r_{*S}^2/r_*, \pi - \theta, \varphi + \pi) \tag{11b}$$

Isometrien der Überlagerungsmannigfaltigkeit sind. I_1 hat die 2-Sphäre $r_* = r_{*S}$ als Fixpunktmenge. Was folgt daraus? I_2 besitzt hingegen keine Fixpunkte. Man könnte also den Quotienten bilden, in dem je zwei durch I_2 verbundene Punkte identifiziert werden, der dann wieder eine Mannigfaltigkeit ist. Beschreiben Sie diese.