Übungen zur Vorlesung

Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie

von DOMENICO GIULINI

Blatt 10

Aufgabe 1

Betrachten Sie eine einparametrige Schar von Geodätischen Kurven, die in lokalen Koordinaten durch $x^\mu(\tau,\varepsilon)$ gegeben seien. Hier ist ε der Scharparameter und τ die Bogenlänge der Geodätischen $\tau \mapsto x^\mu(\tau,\varepsilon)$. Es gilt also mit $\partial f/\partial\tau = \dot f$

$$\ddot{x}^\mu(\tau,\varepsilon) + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\big(x(\tau,\varepsilon)\big)\,\dot{x}^\alpha(\tau,\varepsilon)\dot{x}^\beta(\tau,\varepsilon) = 0\,. \tag{1}$$

Entlang jeder Geodätischen der Schar betrachten ist das „Nachbar-Vektorfeld“ definiert durch

$$n^\mu(\tau,\varepsilon) := \frac{\partial x^\mu(\tau,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\,. \tag{2}$$

Die kovariante Ableitung entlang der Geodätischen bezeichnen wir mit ∇_τ, ihre zweimalige Anwendung mit ∇^2_τ. Es gilt also:

$$\nabla_\tau n^\mu \;=\; \dot{n}^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\,\dot{x}^\alpha\,n^\beta\,, \tag{3a}$$

$$\nabla^2_\tau n^\mu \;=\; \frac{\partial\nabla_\tau n^\mu}{\partial\tau} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\,\dot{x}^\alpha\,\nabla_\tau n^\beta\,. \tag{3b}$$

Hier haben wir die Argumente nicht nochmals explizit angeschrieben: Die x^α und n^β haben (τ,ε) und die $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ haben $x(\tau,\varepsilon)$ als Argumente.

Zeigen Sie die *Jacobi-Gleichung*:

$$\nabla^2_\tau n^\mu = -R^\mu{}_{\alpha\nu\beta}\,n^\nu\,\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta\,. \tag{4}$$

Hier sind die Argumente der x^α und n^β wieder (τ,ε) und das Argument der Krümmungstensorkomponenten $R^\mu{}_{\alpha\nu\beta}$ ist $x(\tau,\varepsilon)$.

Tipp: Gehen Sie von (3b) *aus, ersetzen Sie darin $\nabla_\tau n^\alpha$ durch* (3a). *Die so entstehenden zweiten Ableitungen $\ddot{n}^\mu$ ersetzen Sie mit der Gleichung, die Sie aus* (1) *durch partielle Differentiation nach τ erhalten. Damit handeln Sie sich vorübergehend zweite Ableitungen $\ddot{x}^\alpha$ ein, die Sie aber mit* (1) *eliminieren können.*

Aufgabe 2

Wir greifen eine Geodätische der in Aufgabe 1 beschriebenen Schar heraus und führen entlang ihr eine parallelverschobene angepasste Basis $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ ein auf die wir von nun an die Komponenten des Nachbar-Vektorfeldes n beziehen. Angepasst heißt, dass e_0 Tangential an die Geodätische ist ($e_0 = \dot{x}/c$) und e_1 in radiale Richtung zeigt.

Durch Berechnung der Krümmungskomponenten für die Schwarzschild-Metrik kann dann zeigen, dass (4) äquivalent ist zu folgenden zwei Gleichungen:

$$\ddot{n}_{\|} = \frac{2mc^2}{r^3} n_{\|} \,, \tag{5a}$$

$$\ddot{n}_{\perp} = -\frac{mc^2}{r^3} n_{\perp} \,. \tag{5b}$$

Hier bezeichnet $n_{\|}$ die Komponente des Nachbar-Vektorfeldes in e_1 (radialer) Richtung, $n_{\|}$ in eine dazu senkrechte räumliche Richtung (welche ist wegen der sphärischen Symmetrie egal); $m := GM/c^2$ ist die Masse des Objekts in geometrischen Einheiten (Hälfte des Schwarzschildradius').

Wir betrachten einen frei fallenden Körper in Forme einer Säule der Länge ℓ und quadratischem Querschnitt der Breite b. Die Säulenachse zeige in radialer Richtung. Nehmen Sie an, dass sich der Schwerpunkt der Säule auf einer Geodätischen in der Schwarzschildmetrik bewegt und dass die anderen Teile der Säule durch die elastischen Kräfte innerhalb der Säule auf festen Positionen bezüglich des Schwerpunktes gehalten werden (gemessen in mitbewegten Bezugssystem), so dass die Säule der Gesamtmasse μ eine homogene Massendichte $\rho = \mu/(\ell b^2)$ besitzt.

Zeigen Sie dann mit Hilfe von (5), dass ein Massenelement $d\mu$ in der Höhe h über dem Schwerpunkt eine vom Schwerpunkt weggerichtete Kraft vom Betrag

$$dF = (2mc^2 h/r^3)\, d\mu \tag{6}$$

erfährt und somit im Fall $\ell \ll r$ (r konstant über den Stab) die gesamte längsgerichtete Zugspannung auf die Ebene durch den Schwerpunkt gegeben ist durch

$$T_{\|} = \frac{c^2}{4} \frac{\mu m \ell}{r^3 b^2} = \frac{\rho c^2}{8} \left(\frac{\ell}{2m}\right)^2 \left(\frac{2m}{r}\right)^3 . \tag{7}$$

Zeigen Sie weiter, dass sich ganz analog eine Druckspannung senkrecht zur Bewegungsrichtung ergibt vom Betrag

$$T_{\perp} = \frac{c^2}{8} \frac{\mu m}{r^3 \ell} = \frac{\rho c^2}{16} \left(\frac{b}{2m}\right)^2 \left(\frac{2m}{r}\right)^3 . \tag{8}$$

Spezialisieren Sie nun auf $r = 2m$ (Fall durch den Horizont eines schwarzen Lochs), $\rho = 1 \cdot \mathrm{g} \cdot \mathrm{cm}^{-3}$ (Dichte von Wasser $\approx$ durchschnittliche Dichte des menschlichen Körpers), $\ell = 180\,\mathrm{cm}$ (Größe eines Menschen) und $b = 33\,\mathrm{cm}$ (Breite eines Menschen). Zeigen Sie, dass (7) dann geschrieben werden kann als

$$T_{\|}/E = Z \left(\frac{M_{\odot}}{M} \cdot 10^4\right)^2 . \tag{9}$$

Dabei ist $M_{\odot} = 2 \cdot 10^{33}\,\mathrm{g}$ die Masse der Sonne und $E = 10^5\,\mathrm{g}/(\mathrm{s}^2\,\mathrm{cm})$ die Zugspannung, die eine Gewichtskraft von $100\,\mathrm{Kp}$ auf eine Querschnittsfläche von $b^2 = 10^3\,\mathrm{cm}^2$ verteilt. Z ist ein Zahlenfaktor, den Sie bestimmen sollen. Schätzen Sie ab, für welche Werte für M ein Sprung durch den Horizont eines schwarzen Lochs weniger belastend ist als ein Bungee-Jump?