

Übungen zur Vorlesung
Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie
 von DOMENICO GIULINI

Blatt 2

Aufgabe 1

Wiederholen Sie knapp folgende Sachverhalte aus der Newton'schen Mechanik mit Begründungen:

Der Energiesatz für eine Punktmasse m im Zentralpotential $V(r)$ mit Gesamtenergie E und Gesamtdrehimpuls $\vec{L} = L\vec{e}_z$ kann unter Ausnutzung von $m r^2 \dot{\varphi} = L$ auf folgende Form gebracht werden:

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \frac{L^2}{r^4} = 2m(E - V(r)) - \frac{L^2}{r^2} \quad (1)$$

Für das Newtonsche Potential $V(r) = -\alpha/r$ lässt sich dies nach vorübergehender Einführung von $u = 1/r$ leicht integrieren und man erhält

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \varphi} \quad (2a)$$

mit

$$p := \frac{L^2}{m\alpha} \quad \text{und} \quad \epsilon := \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}}, \quad (2b)$$

was bekanntlich eine Ellipse mit großer Halbachse $a = p/(1 - \epsilon^2) = -\alpha/2E$ und Exzentrizität ϵ beschreibt. $\varphi = 0$ entspricht dem Punkt größter Annäherung, dem *Periastron*. Dieser kehrt mit der Periodizität 2π wieder und ist daher ein fester Punkt im Raum; die Bahn ist also geschlossen.

Für allgemeines $V(r)$ wird die Bahn im Allgemeinen nicht geschlossen sein. Vielmehr gilt nach (1) für den Exzess $\Delta\varphi$ der Periastronwiederkehr

$$\begin{aligned} 2\pi + \Delta\varphi &= 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr L/r^2}{\sqrt{2m(E - V(r)) - L^2/r^2}} \\ &= -2 \frac{\partial}{\partial L} \bigg|_E \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} dr \sqrt{2m(E - V(r)) - L^2/r^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Betrachten Sie nun das Potential $V(r) = -\frac{\alpha}{r} + \Delta V(r)$ mit ΔV als „kleiner Störung“. Leiten Sie in linearer Näherung aus (3) folgenden Ausdruck für $\Delta\varphi$ ab:

$$\Delta\varphi = m \frac{\partial}{\partial L} \bigg|_E \left\{ \frac{1}{L} \int_0^{2\pi} d\varphi r_*^2(\varphi; L, E) \Delta V(r_*(\varphi; L, E)) \right\}. \quad (4)$$

Hier ist $r_*(\varphi; L, E)$ die Lösung (2a) zum ungestörten Potential $-\alpha/r$ zu den Werten L und E von Drehimpuls und Energie. Beachten Sie, dass in (3) und (4) der Term hinter der partiellen Ableitung als Funktion von L und E aufgefasst wird, so dass die partielle Ableitung nach L bei konstantem E auszuführen ist, was durch das Symbol $\big|_E$ angedeutet wurde.

Berechnen Sie nun $\Delta\varphi$ für die Störungen der Form $\Delta V_2(r) = \delta_2/r^2$ und $\Delta V_3(r) = \delta_3/r^3$ und zeigen Sie, dass sich ausgedrückt durch die große Halbachse a und die Exzentrizität e der ungestörten Ellipse folgende Werte ergeben:

$$\Delta_2\varphi = -2\pi\delta_2 mL^{-2} = -2\pi \frac{\delta_2/\alpha}{a(1-e^2)}, \quad (5a)$$

$$\Delta_3\varphi = -6\pi\alpha\delta_3 m^2 L^{-4} = -6\pi \frac{\delta_3/\alpha}{a^2(1-e^2)^2}. \quad (5b)$$

(Achtung: Prinzipiell sind vor der partiellen Differentiation nach L die Parameter p und e durch (2b) als Funktionen von L und E auszudrücken.)

Aufgabe 2

Die Sonne ist als Folge Ihrer Eigenrotation entlang ihrer Rotationsachse abgeplattet und besitzt dadurch ein Quadrupolmoment, das durch den dimensionslosen Parameter J_2 charakterisiert wird. Ihr Gravitationspotential wird dadurch modifiziert zu zu

$$V(r, \theta) = -\frac{\alpha}{r} \left(1 + J_2 \frac{R^2}{2r^2} (1 - 3 \cos^2 \theta) \right), \quad (6)$$

wobei R den Radius der Sonne bezeichnet.

Begründen Sie, warum trotz der Abhängigkeit des Potentials von θ eine Bahn, die anfänglich innerhalb und tangential zur Ebene $\theta = \pi/2$ startet auch weiterhin innerhalb dieser Ebene verlaufen wird. Benutzen Sie (5b) (warum dürfen Sie das?) um die durch das Quadrupolmoment verursachte Periheldrehung $(\Delta\varphi)_{\text{Quad}}$ für Bahnen in der Äquatorialebene ($\theta = \pi/2$) zu bestimmen. Zeigen Sie damit, dass

$$(\Delta\varphi)_{\text{Quad}} = 3\pi J_2 \left[\frac{R}{a(1-e^2)} \right]^2 \quad (7)$$

Wie groß müsste der Parameter J_2 für das Quadrupolmoment der Sonne sein, damit dadurch die gemessene Periheldrehung des Merkur von etwa 43 Bogensekunden pro 100 Jahren erklärt würde?