Übungen zur Vorlesung

Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie

von DOMENICO GIULINI

Blatt 3

Aufgabe 1

In der Vorlesung wurden Raumkurven $\vec{z}(\lambda)$ diskutiert, wobei λ ein beliebiger Parameter ist. Die Krümmung der Kurve wurde durch $\kappa = \|\ddot{\vec{z}}\|$ definiert, wobei ein Punkt die Ableitung nach der Eigenlänge bezeichnet. Die Ableitung nach dem allgemeinen Parameter λ bezeichnen wir im Folgenden mit einen Strich. Es gilt

$$\frac{d}{ds} = \frac{1}{\|\vec{z}'\|} \frac{d}{d\lambda} \,. \tag{1}$$

Zeigen Sie damit, dass die Krümmung einer Kurve in allgemeiner Parametrisierung gegeben ist durch

$$\kappa = \frac{\|\vec{z}' \times \vec{z}''\|}{\|\vec{z}'\|^3} \,. \tag{2}$$

Und weiter: Ist die Kurve eben und in der Form $\vec{z}(\lambda) = (x(\lambda), y(\lambda), 0)$ gegeben, so ist die Krümmung gleich

$$\kappa := \frac{|x'y'' - y'x''|}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}} \,. \tag{3}$$

Spezialisieren Sie nochmals auf den Fall, in dem die Kurve als Graph $y(x)$ in der xy-Ebene gegeben ist.

Aufgabe 2

Gemäß der 2. Frenet-Serret-Formel

$$\dot{\vec{e}}_2 = -\kappa \vec{e}_1 + \tau \vec{e}_3 \tag{4}$$

genügt die Torsion τ der Gleichung

$$\tau = \dot{\vec{e}}_2 \cdot \vec{e}_3 \,. \tag{5}$$

Zeigen Sie damit, dass

$$\tau = \frac{\left(\dot{\vec{z}} \times \ddot{\vec{z}}\right) \cdot \dddot{\vec{z}}}{\|\ddot{\vec{z}}\|^2} \,, \tag{6}$$

wobei ein Punkt die Ableitung nach der Eigenlänge s bezeichnet.

Zeigen Sie weiter: Ist die Kurve in allgemeiner Parametrisierung $\lambda \mapsto \vec{z}(\lambda)$ gegeben, dann gilt

$$\tau = \frac{\left(\vec{z}' \times \vec{z}''\right) \cdot \vec{z}'''}{\|\vec{z}' \times \vec{z}''\|^2}\,, \tag{7}$$

wobei ein Strich wieder die Ableitung nach λ anzeigt.

Aufgabe 3

Sei $\vec{z}(s)$ die Darstellung einer Kurve, wobei s die Eigenlänge (gemessen von einem willkürlichen gewählten Anfangspunkt) bezeichnet. Wir suchen die Mittelpunkte $\vec{m}$ aller Kugeln (2-Spären), an denen die Kurve bei $\vec{z}(s = s_*)$ einen Berührungspunkt möglichst hoher Ordnung hat (auch *Schmiegkugeln* genannt). Das bedeutet, dass die Funktion $f(s) = (\vec{z}(s) - \vec{m})^2 - R^2$ an der Stelle $s = s_*$ samt möglichst vieler Ableitungen verschwindet. Aus diesen Bedingungen sind dann die möglichen Radien R und Mittelpunkte $\vec{m}$ der Kugeln zu bestimmen, das sind $1 + 3 = 4$ Parameter.

Zeigen Sie mit Hilfe der Frenet-Serret-Gleichungen, dass die ersten vier dieser Bedingungen auf folgende Gleichungen führen:

$$\begin{aligned} f(s_*) \;\; &= \left(\vec{z}(s_*) - \vec{m}\right)^2 - R^2 = 0\,, && \text{(8a)}\\ f'(s_*) \;\; &= 2\vec{e}_1(s_*) \cdot \left(\vec{z}(s_*) - \vec{m}\right) = 0\,, && \text{(8b)}\\ f''(s_*) \;\; &= 2\kappa(s_*)\,\vec{e}_2(s_*) \cdot \left(\vec{z}(s_*) - \vec{m}\right) + 2 = 0\,, && \text{(8c)}\\ f'''(s_*) &= 2\left(\vec{z}(s_*) - \vec{m}\right) \cdot \left(-\kappa^2\vec{e}_1 + \dot{\kappa}\vec{e}_2 + \kappa\tau\vec{e}_3\right)\big|_{s=s_*} = 0\,. && \text{(8d)} \end{aligned}$$

Zeigen Sie weiter: Setzt man

$$\vec{m} - \vec{z}(s_*) =: \vec{\rho}(s_*) = \sum_{a=1}^{3} \rho^a(s_*)\vec{e}_a(s_*)\,, \tag{9}$$

dann sind die Gleichungen (8) äquivalent zu

$$\begin{aligned} &\|\vec{\rho}(s_*)\|^2 = \sum_{a=1}^{3} \left(\rho^a(s_*)\right)^2 = R^2\,, && \text{(10a)}\\ &\rho^1(s_*) = 0\,, && \text{(10b)}\\ &\rho^2(s_*) = 1/\kappa(s_*)\,, && \text{(10c)}\\ &\rho^3(s_*)\,\kappa(s_*)\tau(s_*) = -\dot{\kappa}(s_*)/\kappa(s_*)\,. && \text{(10d)} \end{aligned}$$

Beweisen Sie nun folgenden

Satz: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $s_* \in I$ und $\vec{z} : I \to \mathbb{R}^3$ eine C^3-Kurve mit $\kappa(s_*) \neq 0$. (Es existiert also das begleitende Dreibein in einer Umgebung von s_*.) Wir betrachten die einparametrige Schar (Scharparameter λ) von Kugeln (2-Sphären) $K\left(\vec{m}(\lambda), R(\lambda)\right)$ mit $\vec{m}(\lambda) = \vec{z}(s_*) + \vec{e}_2(s_*)/\kappa(s_*) + \lambda\vec{e}_3(s_*)$ und $R(\lambda) = \sqrt{(1/\kappa(s_*))^2 + \lambda^2}$. Jede dieser Kugeln enthält den Kreis in der Krümmungsebene mit Mittelpunkt $\vec{z}(s_*) + \vec{e}_2(s_*)/\kappa(s_*)$ und Radius $1/\kappa(s_*)$, genannt *Krümmungskreis*. Ist $\tau(s_*) = 0$ so sind entweder alle oder keine diese Berührungen sogar von dritter Ordnung, je nachdem ob $\dot{\kappa}(s_*) = 0$ beziehungsweise $\dot{\kappa}(s_*) \neq 0$. Ist hingegen $\tau(s_*) \neq 0$ so berührt genau eine Kugel der Schar die Kurve $\vec{z}$ am Punkte $\vec{z}(s_*)$ auch in dritter Ordung, nämlich die mit

$$\lambda = \lambda_* := \frac{-\dot{\kappa}(s_*)}{\tau(s_*)\kappa^2(s_*)} = \rho^3(s_*)\,. \tag{11}$$

□

Aufgabe 4

Folgern Sie aus dem Satz der vorhergehenden Aufgabe im Fall $\tau(s_*) \neq 0$ und $\dot{\kappa}(s_*) \neq 0$ die Existenz eines Kreises (welcher?), genannt *Schmiegkreis*, der die Kurve am Punkt $\vec{z}(s_*)$ von dritter Ordnung berührt, also um eine Ordung höher als der Krümmungskreis, dass dieser Kreis in einer von der Krümmungsebene verschiedenen Ebene liegt (welcher?), genannt *Schmiegebene*, und dass der Radius dieses Kreises, genannt *Schmiegradius*, echt größer ist (wie groß?) als der Krümmungsradius. Zeigen Sie insbesondere, dass der Schmiegkreis ein Großkreis der Schmiegkuegel ist (im Gegensatz zum Krümmungskreis, der zwar ebenfalls auf der Schmiegkugel liegt aber nur für $\dot{\kappa}(s_*) = 0$ Großkreis ist) und dass das Verhältnis von Schmiegradius R_S zu Krümmungsradius R_K gegeben ist durch

$$\frac{R_S}{R_K} = \sqrt{1 + \left(\frac{\dot{\kappa}(s_*)}{\tau(s_*)\kappa(s_*)}\right)^2}\,. \tag{12}$$