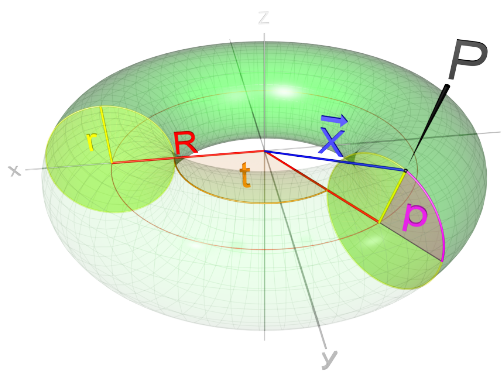
Übungen zur Vorlesung

Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie

von DOMENICO GIULINI

Blatt 4

Aufgabe 1



Das Bild zeigt eine Torusfläche, dessen Mittelkreis wir uns als Kreis vom Radius R in der xy-Ebene um den Ursprung denken. Die Torusfläche besteht dann in einem Schlauch vom Radius $r < R$ um den Mittelkreis. Sie wird durch zwei Winkelkoordinaten $x^1 = t$ (Längengrad) und $x^2 = p$ (Breitengrad) parametrisiert, so dass (wir schreiben, der Vorlesung folgend, $\vec{z}$ statt $\vec{x}$):

$$\vec{z}(t,p) = R\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\\ 0\end{pmatrix} + r\cos p\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\\ 0\end{pmatrix} + r\sin p\,\vec{e}_z = \begin{pmatrix}(R + r\cos p)\cos t\\ (R + r\cos p)\sin t\\ r\sin p\end{pmatrix} \tag{1}$$

Berechnen Sie die Matrix der ersten Fundamentalform (Metrik) gemäß:

$$g_{ab} = \vec{z}_a \cdot \vec{z}_b\,. \tag{2}$$

Wie groß ist der Flächeninhalt der Torusfläche?

Zeigen Sie, dass die Flächennormale gegeben ist durch

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}\cos p\ \cos t\\ \cos p\ \sin t\\ \sin p\end{pmatrix}\,. \tag{3}$$

Berechnen Sie daraus die Matrix L_a^b der Weingarten-Abbildung, indem Sie folgende Gleichung aus der Vorlesung benutzen (wie immer ist $\vec{n}_a := \partial\vec{n}/\partial x^a$):

$$\vec{n}_a := L_a^b\,\vec{z}_b\,. \tag{4}$$

Da diese bereits in Diagonalform ist, können Sie die Eigenwerte der Weingarten-Abbildung einfach ablesen. Zeigen Sie damit, dass die Gauß'sche Krümmung der Torusfläche gegeben ist durch

$$K(t,p) = \frac{\cos p}{R + r\cos p} \cdot \frac{1}{r}\,. \tag{5}$$

Was ergibt die Integration der Gauß'schen Krümmung über die gesamte Torusfläche? Ist es nicht seltsam, dass dieses Integral von R und r unabhängig ist?

Einleitung zu den nun folgenden Aufgaben 2-5

Die Einbettungsfunktion $\vec{z} : U \to \mathbb{R}^3$, hängt davon ab, wie das Flächenstück durch $U \subset \mathbb{R}^2$ parametrisiert wird. Wir betrachten eine Umparametrisierung $\phi : U \mapsto U' \subset \mathbb{R}^2$ die bijektiv und gemeinsam mit ihrer Umkehrung dreimal stetig differenziervar ist. Nach Umparametrisierung wird das gleiche Bild der Fläche im $\mathbb{R}^3$ durch folgende Funktion repräsentiert:

$$\bar{\vec{z}} : \bar{U} \to \mathbb{R}^3\,, \quad \bar{\vec{z}} := \vec{z} \circ \phi^{-1} \tag{6}$$

Abkürzend schreiben wir auch $\bar{x} = \phi(x)$ mit $x := (x^1, x^2)$ und $\bar{x} = (\bar{x}^1, \bar{x}^2)$, so dass wir bei gegebenem ϕ $\bar{x}^1$ und $\bar{x}^2$ jeweils direkt als Funktionen von (x^1, x^2) auffassen dürfen; d.h. $\bar{x}^1(x^1, x^2)$ und $\bar{x}^2(x^1, x^2)$. Die Jacobi-Matrizen dieser Funktionen bzw. ihrer Inversen, $x^1(\bar{x}^1, \bar{x}^2)$ und $x^2(\bar{x}^1, \bar{x}^2)$, sind dann dann (ein vorgestelltes D bezeichnet wie üblich die Ableitung einer Funktion)

$$J^{\bar{a}}_b(x) := [D\phi(x)]^{\bar{a}}_b \quad = \frac{\partial \bar{x}^{\bar{a}}}{\partial x^b}\Big|_{x=(x^1,x^2)}\,, \tag{7a}$$

$$\bar{J}^{a}_{\bar{b}}(\bar{x}) := [D\phi^{-1}(\bar{x})]^{a}_{\bar{b}} = \frac{\partial x^{a}}{\partial \bar{x}^{\bar{b}}}\Big|_{\bar{x}=(\bar{x}^1,\bar{x}^2)}\,, \tag{7b}$$

so dass

$$J^{\bar{a}}_c(x)\bar{J}^{c}_{\bar{b}}(\bar{x}) = \delta^{\bar{a}}_{\bar{b}} \quad \text{und} \quad \bar{J}^{a}_{\bar{c}}(\bar{x})J^{\bar{c}}_b(x) = \delta^a_b\,. \tag{7c}$$

Dabei haben wir Komponentenindizes, die sich auf die neuen (überstrichenen) Koordinaten $\bar{x}$ beziehen, ebenfalls mit einem Balken versehen, also $\bar{x}^{\bar{a}}$ statt $\bar{x}^a$ geschrieben, was die Lesbarkeit erleichtert, wenn Ableitungen durch angehängte Indizes geschrieben werden (wie in (12) unten).

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die Tangentialvektorfelder $\vec{z}_a := \partial\vec{z}/\partial x^a$ und die metrischen Koeffizienten $g_{ab}(x) = \vec{z}_a(x) \cdot \vec{z}_b(x)$ unter (6) wie folgt transformieren:

$$\bar{\vec{z}}_{\bar{a}}(\bar{x}) = \vec{z}_b(x)\bar{J}^b_{\bar{a}}(\bar{x})\,, \tag{8a}$$

$$\bar{g}_{\bar{a}\bar{b}}(\bar{x}) = g_{cd}(x)\bar{J}^c_{\bar{a}}(\bar{x})\bar{J}^d_{\bar{b}}(\bar{x})\,. \tag{8b}$$

Zeigen Sie weiter, dass für die Komponenten eines Tangentialvektorfeldes $\vec{v}$ mit $\vec{v}(p) = \vec{z}_a(x)v^a(x) = \bar{\vec{z}}_{\bar{a}}(\bar{x})\bar{v}^{\bar{a}}(\bar{x})$ am Punkt $p = \vec{z}(x) = \bar{\vec{z}}(\bar{x})$ der Fläche gilt,

$$\bar{v}^{\bar{a}}(\bar{x}) = J^{\bar{a}}_b(x)v^b(x)\,. \tag{9}$$

und dass somit das Skalarprodukt zweier Vektorfelder

$$\bar{g}_{\bar{a}\bar{b}}(\bar{x})\bar{v}^{\bar{a}}(\bar{x})\bar{w}^{\bar{b}}(\bar{x}) = g_{ab}(x)v^a(x)w^b(x)\,, \tag{10}$$

erfüllt, was nur bedeutet, dass es nicht von der Parametrisierung abhängt (was gemäß Definition offensichtlich ist).

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass unter dem Parameterwechsel (6) die 2. Ableitungen der Funktion $\vec{z}$ wie folgt transformieren

$$\vec{z}_{\bar{a}\bar{b}}(\bar{x}) = \vec{z}_{ab}(x)\bar{J}^a_{\bar{a}}(\bar{x})\bar{J}^b_{\bar{b}}(\bar{x}) + \vec{z}_c(x)\bar{J}^c_{\bar{a}\bar{b}}(\bar{x})\,, \tag{11}$$

wobei

$$\bar{J}^c_{\bar{a}\bar{b}} = \frac{\partial \bar{J}^c_{\bar{a}}}{\partial \bar{x}^{\bar{b}}} = \frac{\partial^2 x^c}{\partial \bar{x}^{\bar{a}}\partial \bar{x}^{\bar{b}}}\,. \tag{12}$$

Benutzen sie nun die K_{ab} und Γ^c_{ab} definierende Gleichung aus der Vorlesung,

$$\vec{z}_{ab} = K_{ab}\vec{n} + \Gamma^c_{ab}\vec{z}_c\,, \tag{13}$$

um folgende Transformationsformeln für die Koeffizientenfunktionen abzuleiten (wir unterdrücken dabei die Argumente x bzw $\bar{x}$, die sinngemäß immer in der gleichen Weise anzuschreiben sind: $\bar{x}$ für Größen mit Balken, x für Größen ohne Balken):

$$\bar{K}_{\bar{a}\bar{b}} = K_{ab}\ \bar{J}^a_{\bar{a}}\bar{J}^b_{\bar{b}}\,, \tag{14}$$

und

$$\bar{\Gamma}^{\bar{c}}_{\bar{a}\bar{b}} = J^{\bar{c}}_c\,\Gamma^c_{ab}\,\bar{J}^a_{\bar{a}}\bar{J}^b_{\bar{b}} + J^{\bar{c}}_c\bar{J}^c_{\bar{a}\bar{b}} \tag{15a}$$

$$= J^{\bar{c}}_c\left(\Gamma^c_{ab} - \bar{J}^c_{\bar{n}}J^{\bar{n}}_{ab}\right)\bar{J}^a_{\bar{a}}\bar{J}^b_{\bar{b}}\,. \tag{15b}$$

Dabei besteht der Schritt von (15a) nach (15b) lediglich in einem Unschreiben des Inhomogenitätsterms mit Hilfe der Produkt- und Kettenregel, die hier zu Folgender Identität führt:

$$J^{\bar{c}}_c\bar{J}^c_{\bar{a}\bar{b}} = -J^{\bar{c}}_{cb}\bar{J}^b_{\bar{b}}\bar{J}^c_{\bar{a}} \tag{16}$$

Sei p ein Punkt der Fläche an dem die Koordinaten (x^1, x^2) die Werte (x^1_p, x^2_p) annehmen. Führen Sie in der Nachbarschaft von p neue Koordinaten durch

$$\bar{x}^{\bar{c}} = (x^c - x^c_p) + \tfrac{1}{2}\Gamma^c_{ab}(p)\left(x^a - x^a_p\right)\left(x^b - x^b_p\right) \tag{17}$$

ein und zeigen Sie mit Hilfe von (15b), dass $\bar{\Gamma}^{\bar{c}}_{\bar{a}\bar{b}}(p) = 0$ (Tipp: Das können Sie sofort im Kopf ausrechnen - warum?).

Aufgabe 4

Man betrachte nun die Komponenten der so genannten (s.u.) „kovarianten Ableitung“

$$\nabla_a v^c := \frac{\partial v^c}{\partial x^a} + \Gamma^c_{ab}\, v^b\,. \tag{18}$$

Zeigen Sie mit Hilfe von (9) und (15b), dass deren Transformationsgesetz gegeben ist durch (die Argumente x und $\bar{x}$ sind wieder sinngemäß zu ergänzen):

$$\bar{\nabla}_{\bar{a}}\bar{v}^{\bar{c}} = \bar{J}^a_{\bar{a}} J^{\bar{c}}_c\, \nabla_a v^c\,; \tag{19}$$

wobei $\bar{\nabla}$ analog zu (18) definiert ist mit $\bar{\Gamma}$ anstelle von Γ. Welche Rolle spielt hierbei der inhomogene Term in (15b)?

Aufgabe 5

Eine $(p+q)$ - fach indizierte Menge von Funktion $T^{a_1\cdots a_p}_{b_1\cdots b_q}$ der Koordinaten $x = (x^1, x^2)$ bildet die Komponenten eines *Tensorfeldes* der Stufe $\binom{p}{q}$ wenn

$$\bar{T}^{\bar{a}_1\cdots\bar{a}_p}_{\bar{b}_1\cdots\bar{b}_q}(\bar{x}) = J^{\bar{a}_1}_{a_1}(x)\cdots J^{\bar{a}_p}_{a_p}(x)\; T^{a_1\cdots a_p}_{b_1\cdots b_q}(x)\; \bar{J}^{b_1}_{\bar{b}_1}(\bar{x})\cdots \bar{J}^{b_q}_{\bar{b}_q}(\bar{x})\,. \tag{20}$$

Man sagt dann das Tensorfeld sei p-fach kontravariant und q-fach kovariant. (Achtung: Das Symbol $\binom{p}{q}$ hat hier nichts mit dem Binomialkoeffizienten zu tun.)

Die kovariante Ableitung eines Tensors der Stufe $\binom{p}{q}$ ist definiert durch

$$\begin{aligned}
\nabla_c T^{a_1\cdots a_p}_{b_1\cdots b_q} \;:=\; & \frac{\partial T^{a_1\cdots a_p}_{b_1\cdots b_q}}{\partial x^c} \\
& + \Gamma^{a_1}_{cd} T^{d a_2\cdots a_p}_{b_1\cdots b_q} + \cdots + \Gamma^{a_p}_{cd} T^{a_1\cdots a_{p-1} d}_{b_1\cdots b_q} \quad (p \text{ Summanden}) \\
& - \Gamma^{d}_{c b_1} T^{a_1\cdots a_p}_{d b_1\cdots b_q} - \cdots - \Gamma^{d}_{c b_q} T^{a_1\cdots a_p}_{b_1\cdots b_{q-1} d} \quad (q \text{ Summanden})\,.
\end{aligned} \tag{21}$$

Erkennen Sie die Systematik? Zeigen Sie dann allgemein mit Hilfe von (20) und (15), dass die kovariante Ableitung eines Tensors der Stufe $\binom{p}{q}$ ein Tensor der Stufe $\binom{p}{q+1}$ ist. (Tipp: Verwenden Sie (15b) für die oberen und (15a) für die unteren Indizes und erinnern Sie sich die Kettenregel, die z.B. zu $\partial_{\bar{a}} J^{\bar{b}}_b = \bar{J}^a_{\bar{a}} \partial_a J^{\bar{b}}_b = \bar{J}^a_{\bar{a}} J^{\bar{b}}_{ba}$ führt, wobei $\partial_{\bar{a}} := \partial/\partial\bar{x}^{\bar{a}}$ und $\partial_a := \partial/\partial x^a$.