Übungen zur Vorlesung

Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie

von Domenico Giulini

Blatt 5

Aufgabe 1

Die Sphäre vom Radius R im $\mathbb{R}^3$ werde dargestellt durch

$$\vec{z}(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} R\sin\theta\,\cos\varphi \\ R\sin\theta\,\sin\varphi \\ R\cos\theta \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass in den Koordinaten $x^1 = \theta$ und $x^2 = \varphi$ die Komponenten der ersten Fundamentalform (Metrik) gegeben ist durch

$$\{g_{ab}\} = \mathrm{diag}(R^2, R^2 \sin^2\varphi)\,. \tag{2}$$

Bestimmen Sie die Geodätengleichung, indem Sie die Euler-Lagrange-Gleichung des folgenden Energiefunktionals aufstellen:

$$E = \tfrac{1}{2}\int ds\big(R^2\dot\theta^2 + R^2\sin^2\theta\,\dot\varphi^2\big)\,. \tag{3}$$

Hier bezeichnet ein Punkt wie immer die Ableitung nach s.

Bestimmen Sie daraus durch Ablesen die Christoffel-Symbole Γ^c_{ab}. (Hinweis: Nur zwei der sechs Komponenten verschwinden nicht.) Warum erspart dieses Verfahren des direkten Ablesens aus der Geodätengleichung in der Regel viel Arbeit bei der Bestimmung der Christoffel-Symbole aus einer gegebenen Metrik?

Aufgabe 2

Auf der in Aufgabe 1 betrachteten Sphäre hat ein Breitenkreis auf der nördlichen Hemisphäre ($\theta_0 \leq \pi/2$) die Parameterdarstellung $\big(\theta(\lambda), \varphi(\lambda)\big) = (\theta_0, \lambda)$, wobei $\lambda \in [0, 2\pi]$. Bestimmen Sie durch Lösen der folgenden Differentialgleichung den den Winkel (die „Holonomie"), mit der ein einmal um den Breitenkreis parallel verschobener Vektor verdreht zurückkehrt. Die Differentialgleichung der Parallelverschiebung lautet (s. Vorlesung):

$$\frac{dV^c}{d\lambda} + \Gamma^c_{ab}\frac{dx^a}{d\lambda}V^b = 0\,. \tag{4}$$

Zeigen Sie damit, dass der in Bogenmaß gemessene Betrag des Drehwinkels gleich ist dem R^{-2} fachen des Flächeninhalts des Streifens $\theta_0 \leq \theta \leq \pi/2$.

Stellen Sie sich einen nach unten offenen Kreiskegel vor, dessen Symmetrieachse mit der Polachse der 2-Sphäre zusammenfällt, so dass die (nach oben weisende) Spitze oberhalb des Nordpols auf der Polachse liegt. Der Öffnungswinkel des Kegels sei so, dass der Kegelmantel die Sphäre im nördlichen Breitenkreis $\theta = \theta_0$ berührt. Den Kegelmantel denken Sie sich so konstruiert, dass Sie die Ebene entlang zweier von einem Punkt auslaufende Halbgeraden aufschneiden und die entstehenden Ränder identifizieren (zusammenkleben). Der von den Halbgeraden eingeschlossene Winkel sei ϕ. Drücken Sie ϕ durch θ_0 aus. Zeigen Sie, dass das oben erhaltene Resultat für den Drehwinkel auch durch die gewöhnliche Parallelverschiebung eines Vektors auf dem Kegelmantel (d.h. der geschlitzten Ebene) erhalten werden kann.

Aufgabe 3

Beweisen Sie, dass Geodätische auf der Sphäre Segmente von Großkreisen sind. Verbindet man drei nicht auf einem einzigen Großkreis liegende Punkte durch Großkreissegmente (Länge jeweils kleiner als halber Umfang), so erhält man ein sphärisches Dreieck. Zeigen Sie ohne größere Rechnung, insbesondere ohne Lösen von (4), dass ein Vektor nach Paralleltransport entlang aller Seiten des sphärischen Dreiecks um einen Winkel verdreht an den Ausgangspunkt zurückkehrt, der dem Sphärischen Exzess (Winkelsumme im Dreieck in Bogenmaß minus π) entspricht, also wieder dem R^{-2} fachen des umfahrenen Flächeninhalts. (Tipp: Nutzen Sie die in der Vorlesung bewiesenen Sachverhalte, dass 1) das Tangentenvektorfeld entlag einer Geodätischen parallel verschoben ist und dass 2) der Winkel zwischen den Vektoren zweier entlang der gleichen Kurve parallel verschobener Vektorfelder konstant ist.)