Übungen zur Vorlesung

Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie

von DOMENICO GIULINI

Blatt 8

Aufgabe 1

In Aufgabe 1 von Blatt 7 wurde gezeigt, dass das linearisierte Gravitationsfeld $h_{\mu\nu}$ durch Eichbedingungen so eingeschränkt werden kann, dass nur 2 Komponenten von Null verschieden sind.

Zeigen Sie, dass in dieser Eichung für eine in x-Richtung fortschreitende freie Welle nur die $h_{22} = -h_{33} =: h_+$ und die $h_{23} = h_{32} =: h_\times$ Komponenten nicht verschwinden. Zeigen Sie weiter, dass unter einer räumlichen Drehung im Minkowskiraum mit Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \tag{1}$$

entsprechend einer Drehung um die x-Achse mit Winkel φ, diese Komponenten wie folgt transformieren:

$$\begin{pmatrix} h_+ \\ h_\times \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} h'_+ \\ h'_\times \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & -\sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & \cos(2\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_+ \\ h_\times \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Aufgabe 2

Seien X und Y zwei Tangentialvektoren am Punkte p einer Mannigfaltigkeit M mit Metrik g und Dimension $n \geq 3$. Die *Schnittkrümmung* am Punkte p parallel zur Tangentialebene $\mathrm{Span}\{X, Y\}$ ist definiert

$$K_p(X, Y) = \frac{X^\alpha Y^\beta \, R_{\alpha\beta\,\mu\nu} \, X^\mu Y^\nu}{X^\alpha Y^\beta \left(g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu}\right) X^\mu Y^\nu} \tag{3}$$

Machen Sie sich klar, dass in Falle einer positiv definiten Metrik der Nenner einfach die Bedeutung des durch X und Y aufgespannten Flächeninhalts hat. Für indefinite Metriken schränken wir die Wahl der Paare (X, Y) durch die Forderung ein, dass der Nenner in (3) nicht verschwinden möge (keine lichtartigen Ebenen).

Rechnen Sie nach, dass die rechte Seite von (3) nur von der durch X und Y aufgespannten Ebene abhängt, nicht jedoch von der Wahl der Basisvektoren, die diese Ebene aufspannen.

Aufgabe 3

Eine Mannigfaltigkeit heißt von *konstanter Krümmung*, wenn die Schnittkrümmung nicht von der Schnittrichtung abhängt, also $K_p(X,Y)$ für jedes p von X,Y unabhängig ist. Zeigen Sie, dass dies genau dann der Fall ist, wenn

$$\mathrm{Riem} = f\, g \owedge g\,. \tag{4}$$

Hier ist Riem der kovariante (alle Indizes unten) Krümmungstensor und f ist eine reellwertige Funktion. Zeigen Sie mit Hilfe der kovarianten Divergenzfreiheit des Einsteintensors, $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$, dass f konstant sein muss falls die Dimension der Mannigfaltigkeit mindestens 3 ist.

Aufgabe 4

In Aufgabe 3 von Blatt 7 wurde gezeigt, dass die Komponenten des Krümmmungstensors in geodätischen Normalkoordinaten gegeben sind durch:

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\mu\nu} &= -\tfrac{1}{2}(\partial^2_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} + \partial^2_{\beta\nu} g_{\alpha\mu} - \partial^2_{\alpha\nu} g_{\beta\mu} - \partial^2_{\beta\mu} g_{\alpha\nu}) \\ &= -\tfrac{1}{2}(\partial^2 \owedge g)_{\alpha\beta\,\mu\nu}\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Ferner wissen wir aus der Vorlesung, dass die Gauß'sche Krümmung einer 2-dimensionalen Fläche mit Metrik $g = g_{ab}\, dx^a dx^b$, $a,b \in \{1,2\}$, intrinsisch wie folgt ausgedrückt werden kann

$$K = \frac{R_{1212}}{g_{11} g_{22} - (g_{12})^2}\,. \tag{6}$$

Beweisen Sie nun folgende Aussage: Sei $\{x^1, \cdots, x^n\}$ ein geodätisches Normalkoordinatensystem am Punkt p. Dann ist die Schnittkrümmung am Punkte p parallel zur Ebene Span$\{\partial/\partial x^1, \partial/\partial x^2\}$ gleich der Gauß'schen Krümmung des 2-dimensionalen Flächenstücks $x^3 = \cdots = x^n = 0$. Damit ist gezeigt: Die Schnittkrümmung $K_p(X,Y)$ ist gleich der Gauß'schen Krümmung des Flächenstücks am Punkte p, das durch die Geodätischen durch p tangential zu Span$\{X,Y\}$ aufgespannt wird.

Aufgabe 5

Sei $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ eine orthonormierte Basis des Tangentialraumes mit zeitartigem e_0. Zeigen Sie, dass die 00-Komponente des Einsteintensors durch die Summe der räumlichen Schnittkrümmungen wie folgt ausgedrückt werden kann:

$$G_{00} = -\tfrac{1}{2}\sum_{a=1}^{3}\sum_{b=1}^{3} R_{ab\,ab} = -\sum_{a>b} K(e_a, e_b) \tag{7}$$

(Das Minuszeichen ist unserer Signaturkonvention geschuldet, in der die räumliche Metrik negativ-definit ist. Hätten wir die Signatur $(-1,1,1,1)$ gewählt, so müsste rechts in (7) ein Pluszeichen stehen.) Rechnen Sie nach, dass die rechte Seite invariant ist unter orthogonalen Transformationen der räumlichen Basisvektoren. Formulieren Sie nun in Worten so präzise wie möglich, in welchem Sinne gemäß den Einsteingleichungen eine Massen- bzw. Energiedichte den „Raum krümmt".