Übungen zur Vorlesung

Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie

von DOMENICO GIULINI

Blatt 3

Aufgabe 1

Auf der n-dimensionalen glatten Mannigfaltigkeit M betrachten wir die Menge aller (mindestens) zweimal stetig differenzierbaren Kurven $\gamma : \mathbb{R} \subseteq I \to M$, die zwei fest gewählte Punkte p_1 und p_2 auf M vebinden. Wir nennen diese Menge $K_2(p_1, p_2)$. Für eine Kurve $\gamma : \mathbb{R} \supseteq\to M$ in $K_2(p_1, p_2)$ gibt es also Parameterwerte $\lambda_{1,2} \in I$, so dass $\gamma(\lambda_{1,2}) = p_{1,2}$.

Wir setzen der Einfachheit halber weiter voraus, dass M durch eine einzelne Karte (U, ϕ) überdeckt wird. Sei $\{e_1, \cdots, e_n\}$ kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$, dann schreiben wir wie üblich $\phi = x^a e_a$, wobei $x^a : U \to \mathbb{R}$ die Koordinatenfunktionen (Komponenten von ϕ) der Karte sind. Analog schreiben wir $\phi \circ \gamma = \gamma^a e_a$ mit $\gamma^a : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}$ als globaler Koordinatenfunktion der Kurve. Die Ableitungen schreiben wir mit einem Strich: $d\gamma^a(\lambda)/d\lambda =: \gamma'^a(\lambda)$

Auf $K_2(p_1, p_2)$ betrachten wir nun folgende reellwertige Funktionen („Funktionale“ in Physikersprache):

$$\mathcal{L}[\gamma] = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \; \underbrace{\sqrt{g_{ab}\big(\gamma(\lambda)\big)\,\gamma'^a(\lambda)\gamma'^b(\lambda)}}_{L_1(\gamma,\gamma')} \qquad \text{(Längenfunktional)}\,, \tag{1a}$$

$$\mathcal{E}[\gamma] = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \; \underbrace{g_{ab}\big(\gamma(\lambda)\big)\,\gamma'^a(\lambda)\gamma'^b(\lambda)}_{L_2(\gamma,\gamma')} \qquad \text{(Energiefunktional)}\,. \tag{1b}$$

Dabei sind $g_{ab}(p)$ die Koeffizienten einer symmetrischen, positiv definiten Bilinearform g im Tangentialraum T_pM (einer Riemann'schen Metrik).

Zeigen Sie, dass die Euler-Lagrange-Gleichungen für L_1 und L_2 äquivalent sind zu beziehungsweise

$$\gamma''^c(\lambda) + \Gamma^c_{ab}\big(\gamma(\lambda)\big)\,\gamma'^a(\lambda)\gamma'^b(\lambda) = \big(L_1'(\lambda)/L_1(\lambda)\big)\,\gamma'^c(\lambda)\,, \tag{2a}$$

$$\gamma''^c(\lambda) + \Gamma^c_{ab}\big(\gamma(\lambda)\big)\,\gamma'^a(\lambda)\gamma'^b(\lambda) = 0\,, \tag{2b}$$

wobei $L_1(\lambda) := L_1\big(\gamma(\lambda), \gamma'(\lambda)\big)$ und

$$\Gamma^c_{ab} = \tfrac{1}{2} g^{cn}(-g_{ab,n} + g_{na,b} + g_{bn,a})\,. \tag{3}$$

Hier haben wir zur Abkürzung $g_{ab,c} := \partial g_{ab}/\partial x^c$ geschrieben und die Komponenten der zu $\{g_{ab}\}$ inversen Matrix mit g^{ab} bezeichnet, so dass $g^{ac}g_{bc} = \delta^a_b$ (beachte, dass $g_{ab} = g_{ba}$ und deshalb auch $g^{ab} = g^{ba}$).

Man nennt Kurven, die

$$\gamma''^c(\lambda) + \Gamma^c_{ab}\big(\gamma(\lambda)\big)\,\gamma'^a(\lambda)\gamma'^b(\lambda) = h(\lambda)\,\gamma'^c(\lambda) \tag{4}$$

mit irgendeiner Funktion $\lambda \mapsto h(\lambda) \in \mathbb{R}$ erfüllen *Autoparallele*. Falls $h \equiv 0$ heißen diese speziellen Autoparallelen *Geodätische*. Die stationären Punkte des Längenfunktionals sind also genau die Autoparallelen, die des Energiefunktionals die Geodätischen.

Beweisen Sie folgende Aussagen: 1) Unter einer Reparametrisierung $\lambda \mapsto \sigma := f(\lambda)$ bleibt die Eigenschaft, Autoparallele zu sein, erhalten, jedoch i.a. nicht die Eigenschaft, Geodätische zu sein. 2) Erfüllt eine Kurve γ die Gleichung (4) einer Autoparallele mit einer Funktion h auf der rechten Seite, dann erfüllt diese Funktion die Gleichung $h = f''/f'$, wobei f eine beliebige Funktion ist, für die gilt, dass $\sigma := f(\lambda)$ ein zur Bogenlänge affin-äquivalenter Parameter ist. (Letzteres bedeutet: Ist s die Bogenlänge, gemessen von einem nicht weiter spezifizierten Anfangspunkt aus, dann gilt $\sigma = as + b$ mit $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ und $b \in \mathbb{R}$.) 3) Jede Geodätische ist notwendig affin-äquivalent zur Bogenlänge parametrisiert und jede Autoparallele kann durch geeignete Reparametrisierungen zu einer Geodätischen gemacht werden, wobei diese Reparametrisierungen untereinander notwendig affin-äquivalentm sind.

Aufgabe 2

Auf der Einheitssphäre $S^2_1 := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\vec{x}\| = 1\}$ führen wir (im Komplement des Nullmeridians) wie üblich Polarkoordinaten $x^1 = \theta$ und $x^2 = \varphi$ ein. Dann ist

$$g_{ab}(\gamma)\gamma'^a\gamma'^b = \theta'^2 + \sin^2(\theta)\,\varphi'^2\,. \tag{5}$$

wobei wir hier der Einfachheit halber $\theta(\lambda)$ für $\theta\circ\gamma(\lambda)$ und $\varphi(\lambda)$ für $\varphi\circ\gamma(\lambda)$ schreiben.

Zeigen Sie, dass die Autoparallelen genau die Großkreise oder Stücke von diesen sind. Zeigen Sie dies einerseits anhand der Euler-Lagrange Gleichungen, indem Sie von der Tatsache Gebrauch machen, dass diese alle räumlichen Drehungen als Symmetrien besitzen. Auf der anderen Seite können Sie auch ohne Rechnung mit Hilfe einer Spiegelsymmetrie argumentieren, ganz analog zu Aufgabe 2 auf Blatt 2. Versuchen Sie dieses Argument möglichst präzise und vollständig zu geben.