Übungen zur Vorlesung

Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie

von Domenico Giulini

Blatt 4

Aufgabe 1

Wie in Aufgabe 1 von Blatt 3 betrachten wir wieder das Längen- und Energiefunktional auf der Menge $K_2(p_1, p_2)$ der stückweise zweimal stetig differenzierbaren Kurven durch p_1 und p_2. Kurven $\Gamma : \mathbb{R} \subseteq I \to M$ schreiben wir bezüglich einer Karte (U, ϕ), mit $\phi = x^a e_e$, wobei $x^a : U \to \mathbb{R}$ die Komponentenfunktionen sind, wieder in Koordinatenform $\phi \circ \gamma = \gamma^a e_a$ mit $\gamma^a := x^a \circ \gamma$. Dann ist

$$\mathcal{L}[\gamma] \;=\; \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \, \sqrt{g_{ab}\big(\gamma(\lambda)\big)\gamma'^a(\lambda)\gamma'^b(\lambda)} \qquad \text{(Längenfunktional)}\,, \tag{1a}$$

$$\mathcal{E}[\gamma] \;=\; \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \, g_{ab}\big(\gamma(\lambda)\big)\gamma'^a(\lambda)\gamma'^b(\lambda) \qquad \text{(Energiefunktional)}\,. \tag{1b}$$

Dabei sind hier mit $\lambda_{1,2}$ kollektiv die jeweiligen Parameterwerte bezeichnet, für die die Kurven durch die vorgebenen Punkte $p_{1,2}$ laufen.

Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}$ unter Reparametrisierungen invariant ist, während man $\mathcal{E}[\gamma]$ durch Reparametrisierung von γ jeden positiven reellen Wert geben kann, auch dann, wenn man sich auf affine Reparametrisierungen einschränkt.

Es ist ansachaulich klar, dass das Längenfunktional nach unten beschränkt ist, das heisst für $p_1 \neq p_2$ ein Infimum > 0 besitzt. Man kann zeigen, dass es auch immer eine (nicht notwendig eindeutige) Kurve gibt, die dieses Infimum auch tatsächlich annimmt und dass diese notwendig eine Autoparallele sein muss. Sei also γ_* diese „längenminimierende“ Kurve, so dass also für alle $\gamma \in K_2(p_1, p_2)$ gilt

$$\mathcal{L}[\gamma_*] \leq \mathcal{L}[\gamma]\,. \tag{2}$$

Dabei spielen wegen der Reparametrisierungsinvarianz des Längenfunktionals die Parametrisierungen keine Rolle.

Da der Wert des Energiefunktionals von der Parametrisierung abhängt, kann Gleichung (2) sicher nicht auch für das Energiefunktional gelten, jedenfalls dann nicht, wenn man γ unabhängig von γ_* parametrisieren darf. Zeigen Sie nun: Parametrisiert man γ_* und alle Vergleichskurven γ proportional zur Bogenlänge so, dass die Parameterwerte λ_1 und λ_2, für die Kurven durch p_1 bzw. p_2 laufen stets gleich sind, dann gilt auch

$$\mathcal{E}[\gamma_*] \leq \mathcal{E}[\gamma]\,. \tag{3}$$

Die „längenminimierende“ Kurve ist also auch „energieminimierend“ unter allen Kurven, die zu gleichen affinen Parameterwerten $\lambda_{1,2}$ durch $p_{1,2}$ laufen. γ_* ist dann eine Geodätische.

Tipp: Benutzen Sie die Cauchy-Schwarz Ungleichung

$$\left[\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda\, f(\lambda)g(\lambda)\right]^2 \leq \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda\, f^2(\lambda) \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda\, g^2(\lambda)\,, \tag{4}$$

in der Gleichheit genau dann gilt, wenn f und g proportional sind.

Wenden Sie diese an für $g \equiv 1$ und $f(\lambda) = \sqrt{g_{ab}\big(\gamma(\lambda)\big)\gamma'^a(\lambda)\gamma'^b(\lambda)}$. Gleichheit in (4) gilt in diesem Fall also genau dann, wenn f konstant, also der Parameter λ affin äquivalent zur Bogenlänge ist. Folgern Sie daraus $\mathcal{E}[\gamma](\lambda_2 - \lambda_1) = \mathcal{L}^2[\gamma]$ für jede affin äquivalent zur Bogenlänge parametrisierte Kurve γ. Benutzen die dies zweimal in (2) um (3) für alle Kurven γ mit der genannten Einschränkung an ihre affine Parametrisierung zu beweisen.

Aufgabe 2

Auf der Mannigfaltigkeit $M = \mathbb{R}^3$ mit globaler Standardkarte $(U = M, \phi = xe_1 + ye_2 + ze_3)$ betrachte man die drei Vektorfelder

$$\hat{X}_1 := y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\,, \tag{5a}$$

$$\hat{X}_2 := z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\,, \tag{5b}$$

$$\hat{X}_3 := x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\,. \tag{5c}$$

Zeigen Sie, dass für jedes $a \in \{1,2,3\}$ der Wert von $\hat{X}_a$ am Punkt $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ tangential ist zur 2-Sphäre S^2_r mit Radius $r := \|\vec{x}\|$ und Mittelpunkt im Ursprung. Tipp: Überlegen Sie zuerst, was „tangential zu einer Untermannigfaltigkeit sein“ überhaupt heißt, wenn die Vektoren als Derivationen auf Funktionen definiert sind.

Zeigen Sie weiter, dass diese Vektorfelder folgende Lie-Relationen erfüllen:

$$[\hat{X}_a, \hat{X}_b] = -\hat{X}_c \qquad (a, b, c \text{ zykl. Permutation von } 1,2,3\,)\,. \tag{6}$$

Die Tangentialität bedeutet, dass man die Vektorfelder $\hat{X}_a$, aufgefasst als Schnitte in ST^1_0M (d.h. Abbildungen $M \to T^1_0M$), einschränken kann auf die Sphären S^2_r. Wir betrachten hier nur den Fall $r = 1$ und benennen diese Einschränkungen der $\hat{X}_a$ auf S^2_1 dann jeweils mit X_a (ohne Hut). Also gilt

$$X_a := X_a\big|_{S^2_1} \in ST^1_0S^2_1\,. \tag{7}$$

Führen Sie auf $S^2_1 - \{\text{Nullmeridian}\}$ sphärische Polarkoordinaten (θ, φ) mit $\theta \in (0, \pi)$ und $\varphi \in (0, 2\pi)$ ein und berechnen Sie die Koeffizientenfunktionen von X_1, X_2, X_2 als Linearkominationen der Basisfelder $\partial/\partial\theta$ und $\partial/\partial\varphi$. Erfüllen auch die $X_a \in ST^1_0S^2_1$ die Relationen (6)? Was sagen Ihnen diese Relationen?