Übungen zur Vorlesung

Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie

von Domenico Giulini

Blatt 5

Aufgabe 1

Sei $\alpha \in S\Lambda^\ell M$ Beweisen Sie mit Hilfe der in der Vorlesung angegebenen expliziten Formel für $d\alpha(X_0, \cdots, X_\ell)$ die Cartan-Identität für die Lie-Ableitung

$$L_{X_0}\alpha = i_{X_0}d\alpha + d(i_{X_0}\alpha)\,. \tag{1}$$

Dabei ist $i_{X_0} : S\Lambda^\ell M \to S\Lambda^{\ell-1}M$ die Abbildung, die das erste Argument der Multiplinearform mit X_0 füllt.

Aufgabe 2

In der Vorlesung wurde bewiesen, dass sich die endomorphismuswertige Zusammenhangs 1-Form ω^a_b unter Wechsel des Basisfeldes $e_a \to \hat{e}_a := f^b_a e_b$ so transformiert

$$\hat{\omega}^a_b = (f^{-1})^a_c(\omega^c_d f^d_b + df^c_b)\,. \tag{2}$$

Zeigen Sie: Ist es möglich, durch Wahl der Funktionen f^a_b in einer offenen Umgebung $\hat{\omega}^a_b = 0$ zu erreichen, dann ist notwendig

$$\Omega^a_b := d\omega^a_b + \omega^a_n \wedge \omega^n_b = 0\,, \tag{3}$$

das heißt die Krümmung verschwindet. Gilt auch die Umkehrung? Zeigen Sie weiter, dass durch geeignete Wahl der f^a_b die $\hat{\omega}^a_b(\dot{\gamma})$ entlang einer vorgegebenen Kurve γ immer zum Verschwinden gebracht werden können.

Aufgabe 3

Sei (M, g) Semi-Riemann'sche Mannigfaltigkeit und ∇ eine kovariante Ableitung. Zeigen Sie, dass für alle $K, X, Y \in ST^1_0M$ gilt:

$$\begin{aligned}(L_K g)(X, Y) =& g(X, \nabla_Y K) + g(Y, \nabla_X K) \\ &+ Q(K, X, Y) - \Theta(X, Y, K) - \Theta(Y, X, K)\,.\end{aligned} \tag{4}$$

Dabei sind Q und Θ in ST^0_3M definiert durch $Q(K, X, Y) := (\nabla_K g)(X, Y)$ und $\Theta(X, Y, K) := g(X, T(Y, K))$ mit $T =$ Torsion. Zeigen Sie weiter: Ist $Q = 0$ und Θ total antisymmetrisch, dann

$$L_K g_{ab} := (L_K g)(e_a, e_b) = \nabla_a K_b + \nabla_b K_a\,, \tag{5}$$

wobei $\nabla_a K_b := g(\nabla_{e_a} K, e_b)$.

Aufgabe 4

Sei wieder bezogen auf ein lokales System dualer Basisfelder $\{e_a \mid a = 1, \cdots, n\}$ und $\{\theta^a \mid a = 1, \cdots, n\}$ und $U \subseteq M$ offen die Koordinatendarstellung von $F \in ST^\ell_m M$ gegeben durch (die Klammern um die Tensorprodukte von Vektorfeldern bzw. Kovektorfeldern sind nur der besseren Lesbarkeit gesetzt)

$$F \;=\; F^{a_1\cdots a_\ell}_{b_1\cdots b_m}\,(e_{a_1} \otimes \cdots \otimes e_{a_\ell}) \otimes (\theta^{b_1} \otimes \cdots \otimes \theta^{b_m})\,. \tag{6}$$

Wir definieren das Symbol $\nabla_c F^{a_1\cdots a_\ell}_{b_1\cdots b_m}$ durch

$$\nabla_{e_c} F \;=:\; \nabla_c F^{a_1\cdots a_\ell}_{b_1\cdots b_m}\,(e_{a_1} \otimes \cdots \otimes e_{a_\ell}) \otimes (\theta^{b_1} \otimes \cdots \otimes \theta^{b_m}) \tag{7}$$

Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \nabla_c F^{a_1\cdots a_\ell}_{b_1\cdots b_m} &= e_c(F^{a_1\cdots a_\ell}_{b_1\cdots b_m}) \\ &\quad + \omega^{a_1}_{cn}\,F^{n\,a_2\cdots a_\ell}_{b_1\cdots b_m} + \cdots + \omega^{a_\ell}_{cn}\,F^{a_1\cdots a_{\ell-1}\,n}_{b_1\cdots b_m} \\ &\quad - \omega^n_{cb_1}\,F^{a_1\cdots a_\ell}_{n\,b_2\cdots b_m} - \cdots - \omega^n_{cb_m}\,F^{a_1\cdots a_\ell}_{b_1\cdots b_{m-1}\,n}\,, \end{aligned} \tag{8}$$

und

$$\begin{aligned} (\nabla_c\nabla_d - \nabla_d\nabla_c)F^{a_1\cdots a_\ell}_{b_1\cdots b_m} &= R^{a_1}{}_{n\,cd}\,F^{n\,a_2\cdots a_\ell}_{b_1\cdots b_m} + \cdots + R^{a_\ell}{}_{n\,cd}\,F^{a_1\cdots a_{\ell-1}\,n}_{b_1\cdots b_m} \\ &\quad - R^n{}_{b_1\,cd}\,F^{a_1\cdots a_\ell}_{n\,b_2\cdots b_m} - \cdots - R^n{}_{b_m\,cd}\,F^{a_1\cdots a_\ell}_{b_1\cdots b_{m-1}\,n} \\ &\quad - T^n_{cd}\nabla_n F^{a_1\cdots a_\ell}_{b_1\cdots b_m}\,. \end{aligned} \tag{9}$$

wobei in der letzten Zeile T^n_{cd} die Komponenten der Torsion sind. Machen Sie sich jeweils die Systematik klar, mit der die rechten Seiten aufgebaut werden.

Tipp: Um (9) zu beweisen, machen Sie sich zunächst klar, dass mit $(\nabla_c\nabla_d - \nabla_d\nabla_c)F^{\cdots}_{\cdots}$ eigentlich $[(i_{e_d} \circ i_{e_c} - i_{e_c} \circ i_{e_d})\nabla\nabla F]^{\cdots}_{\cdots}$ gemeint ist. Zeigen Sie dann allgemein, dass $(i_Y \circ i_X - i_X \circ i_Y)\nabla\nabla F = (\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]})F - \nabla_{T(X,Y)}F$, wobei T der Torsionstensor ist. Zeigen Sie zum Schluss, dass der Ableitungsoperator $\nabla^2_{XY} := \nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$ derivativ auf Tensorprodukte wirkt, d.h. $\nabla^2_{XY}(F \otimes F') = \nabla^2_{XY}F \otimes F' + F \otimes \nabla^2_{XY}F'$.