Übungen zur Vorlesung

Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie

von DOMENICO GIULINI

Blatt 6

Aufgabe 1

Sei Sei (M, g) Semi-Riemann'sche Mannigfaltigkeit der Dimension n und Levi-Civita-Zusammenhang. Sei $\{e_1, \cdots e_n\}$ ein lokales orthonormiertes Basisfeld auf M, so dass also $g(e_a, e_b) = \pm\delta_{ab}$. Sei $\{\theta^1, \cdots \theta^n\}$ das zugehörige Feld der Kobasen.

Wir definieren eine Volumenform $\varepsilon \in S\Lambda^n M$ durch

$$\varepsilon = \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n \,. \tag{1}$$

Das ist sinvoll, denn dann hat das von den $\{e_1, \cdots e_n\}$ aufgespannte Parallelpiped Einheitsvolumen.

Sei (U, ϕ) lokale Karte mit Koordinatenfunktionen $x^a :\to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$\varepsilon|_U = \sqrt{|\det\{g_{ab}|\}}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \,, \tag{2}$$

wobei g_{ab} die Komponenten von g in der Koordinatenbasis $\{\partial/\partial x^a \mid a = 1, \cdots, n\}$ sind und außerdem vorausgesetzt ist, dass die Basen $\{e_1, \cdots e_n\}$ und die Koordinatenbasis die gleiche Orientierung besitzen.

Ist $X \in ST^1_0 M$ ein Vektorfeld. Zeigen Sie, dass

$$L_X \varepsilon = div(X)\, \varepsilon \tag{3}$$

mit

$$div(X) = \frac{1}{\sqrt{|\det\{g_{ab}\}|}} \partial_a \Big(\sqrt{|\det\{g_{ab}\}|}\, X^a \Big) \,, \tag{4}$$

und dass auch gilt

$$div(X) = \nabla_a X^a \,. \tag{5}$$

Tipp: Zeigen Sie für den letzten Schritt, dass $\Gamma^c_{ac} = \big|\det\{g_{nm}\}\big|^{-1/2} \partial_a \big|\det\{g_{nm}\}\big|^{1/2}$.

Wir nennen ein Vektorfeld $X \in ST^1_0 M$ divergenzfrei wenn $div(X) = 0$; in Komponenten $\nabla_a X^a = 0$. Entsprechend nennen wir eine Kovektorfeld $\alpha \in ST^0_1 M$ divergenzfrei, wenn das zugehörige Vektorfeld $\alpha^\sharp$, das durch $g(\cdot, \alpha^\sharp) = \alpha$ definiert ist, divergenzfrei ist. In Komponenten $\nabla_a (\alpha^\sharp)^a = 0$, also $\nabla_a (g^{ab} \alpha_b) = g^{ab} \nabla_a \alpha_b =: \nabla^a \alpha_a = 0$.

Aufgabe 2

Sei (M, g) Semi-Riemann'sche Mannigfaltigkeit mit Levi-Civita Zusammenhang und seien $T \in ST^0_2 M$ und $K \in ST^1_0 M$. Zeigen Sie: Ist T symmetrisch und divergenzfrei, und ist K Killing, also gilt $L_K g = 0$, dann ist das Kovektorfeld $i_K T$ divergenzfrei.

Aufgabe 3

Der Energie-Impulstensor $\mathsf{T} \in ST^0_2M$ einer „idealen Flüssigkeit" hängt von folgenden drei Größen ab: 1) Dem Vierergeschwindigkeitsfeld $u \in ST^1_o0M$ der Flüssigkeitsströmung (normiert $g(u,u) = c^2$), 2) der Massendichte im lokalen Ruhesystem $\rho \in C^\infty(M,\mathbb{R})$, 3) dem Druck im lokalen Ruhesystem $p \in C^\infty(M,\mathbb{R})$. T ist dann gegeben durch

$$\mathsf{T} = (\rho + p/c^2)\, u^\flat \otimes u^\flat - p\, g \tag{6a}$$

Eine offensichtliche alternative Schreibweise ist

$$\mathsf{T} = \rho\, u^\flat \otimes u^\flat - ph\,, \tag{6b}$$

wo $h \in ST^0_2M$ gegeben ist durch

$$h = g - n^\flat \otimes n^\flat\,, \quad \text{mit} \quad n := u/c \tag{6c}$$

Zeigen Sie, dass an jedem Punkt $p \in M$ der zu $h_p \in T^*M \otimes T^*M$ gehörige Endomorphismus $\hat{h} = g^\uparrow \circ h \in TM \otimes T^*M$ (in Komponenten $\hat{h}^\mu_n u = g^{\mu\alpha} h_{\alpha\nu}$) gerade die Orthogonalprojektion auf das (bezüglich g_p) orthogonale Komplement von u_p ist.

Wir nehmen an T sei divergenzfrei, $\nabla \cdot \mathsf{T} = 0$, d.h. $\nabla^\mu \mathsf{T}_{\mu\nu} = 0$. Wir schreiben $\dot{u} := \nabla_u u$ und $\dot{p} = \nabla_u p$.

Zeigen Sie, dass $g(u,\dot{u}) = 0$ (d.h. die Viererbeschleunigung ist überall senkrecht zur Vierergeschwindigkeit).

Inden Sie die Gleichung $\nabla \cdot \mathsf{T} = 0$ parallel und senkrecht zu u projezieren, zeigen Sie deren Äquivalenz zu den beiden Gleichungen

$$\nabla_\mu\big(u^\mu(\rho + p/c^2)\big) = \dot{p}/c^2\,, \tag{7a}$$

$$\dot{u}^\mu(\rho + p/c^2) = (g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu/c^2)\partial_\nu p\,. \tag{7b}$$

Interpretieren Sie diese geometrisch und physikalisch.

Tipp: (7b) ist die relativistische Euler-Gleichung, hat aber gegenüber der „nicht-relativistischen" Euler-Gleichung Zusatzterme. Was bedeuten diese? Gleichung (7a) wäre eine Erhaltungsgleichung (divergenzfreier Strom), wenn $\dot{p} = 0$. Was - physikalisch gesehen - verhindert die Erhaltung? Ihre nicht-relativistische Entsprechung ist tatsächliche eine Erhaltungsgleichung. Was wird dort erhalten?

Aufgabe 4

Sei (M, g) Semi-Riemann'sche Mannigfaltigkeit mit Levi-Civita Zusammenhang. Wir bezeichnen den Riemann'schen Krümmungstensor $R \in ST^1_3M$ mit R und den rein kovarianten Krümmungstensor mit $\mathrm{Riem} \in ST^0_4M$. Es gilt dann bekanntlich

$$\mathrm{Riem}(X,Y,Z,W) := g\big(X, R(Z,W)Y\big) \tag{8}$$

mit $R(Z,W)Y = \nabla_Z\nabla_W Y - \nabla_W\nabla_Z Y - \nabla_{[Z,W]}Y$.

Die Schnittkrümung am Punkte p zur Ebene $E := \mathit{Span}\{X_p, Y_p\} \subset T_pM$ ist definiert durch

$$\Sigma(p,E) := \frac{\mathit{Riem}_p(X_p,Y_p,X_p,Y_p)}{g_p(X_p,X_p)g_p(Y_p,Y_p) - \big[g(X_p,Y_p)\big]^2}\,, \tag{9}$$

vorausgesetzt der Nenner verschwindet nicht.

Zeigen Sie zuerst: Sind X_p und Y_p linear unabhängig, dann verschwindet der Nenner genau dann, wenn $g|_E$ entartet ist. Ist (M, g) Lorentz'sche Mannigfaltigkeit, also die Signatur der Metrik $(1, n-1)$ oder $(n-1, 1)$, dann ist dies genau dann der Fall, wenn $g|_E$ nicht definit aber semi-definit ist (d.h. $g|_E$ kann nicht identisch verschwinden). Man nennt eine solche Ebene E lichtartig.

Zeigen Sie weiter: Die rechte Seite von (9) hängt tatsächlich nur von $\mathit{Span}\{X_p, Y_p\} \subset T_pM$ ab und nicht davon, welche Basis $\{X_p, Y_p\}$ von E man wählt.

Es gilt: Die Tensoren $R_p \in T^1_{3\,p}M$ und $\mathit{Riem}_p \in T^0_{4\,p}M$ sind eindeutig bestimmt durch die Werte aller Schnittkrümmungen am Punkt p. Geben Sie ein Argument, dass das ohne Rechnung beweist. (Tipp: Geben Sie das rein algebraische Argument zuerst für den Fall, dass g Riemann'sch ist und überlegen Sie dann anhand eines topologischen Arguments, dass im Semi-Riemann'schen Fall die Herausnahme der lichtartigen Ebenen diesen Schluss nicht verändert.)

Zeigen Sie schließlich: Ist für jeden Punkt $\Sigma(p, E)$ von E unabhängig, dann existiert eine reelle Funktion K auf M, so dass in Komponenten gilt

$$R_{ab\,cd} = K(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}) \tag{10}$$

wobei im Fall $n = \dim(M) > 2$ K tatsächlich eine konstante sein muss (M ist als zusammenhängend angenommen). Berechnen Sie Ricci-Tensor und Ricci-Skalar für (10) sowie den Einstein-Tensor.

Tipp: Die Konstanz von K folgt aus der 2. Bianchi-Identität, am einfachsten in ihrer zweifach kontrahierten Form $\nabla^a G_{ab} = 0$ (hier ist G der Einstein-Tensor).

Aufgabe 5

Sei (M, g) Semi-Riemann'sche Mannigfaltigkeit der Dimension $\dim(M) = n+1$. Sei $p \in M$ und $\{e_0, e_1, \cdots, e_n\}$ eine orthonormierte Basis, d.h. $g(e_a, e_b) = \delta_{ab}\epsilon_b$ (keine Summation über b), wobei $\epsilon = \pm 1$.

Wir schreiben im Folgenden $\Sigma(a, b) := \Sigma\big(p, \mathit{Span}\{e_a, e_b\}\big)$ und lassen das Argument p fort (alle folgenden Relationen sind punktweise zu verstehen). Ric und Ein seinen der Ricci- und Einstein-Tensor.

Zeigen Sie

$$R_{00} \;:=\; \mathit{Ric}(e_0,e_0) \;=\; \epsilon_0 \sum_{a=1}^{n} \Sigma(0,a)\,, \tag{11a}$$

$$G_{00} \;:=\; \mathit{Ein}(e_0,e_0) \;=\; -\,\epsilon_0 \sum_{a=1}^{n} \sum_{b>a}^{n} \Sigma(a,b)\,. \tag{11b}$$

Insbesondere kann man also sagen, dass in einer Lorentzmannigfaltigkeit die „Zeit-Zeit-Komponente“ G_{00} des Einstein-Tensors gleich ist der Summe aller dazu und paarweise untereinander orthogonalen *räumlichen* Schnittkrümmungen. Betrachten Sie unter diesem Aspekt einmal die Aussage der Einstein-Gleichungen der ART!

Aufgabe 6

Sei (M, g) Semi-Riemann'sche Mannigfaltigkeit mit Levi-Civita Zusammenhang. Eine Kurve $\gamma : \mathbb{R} \supset I \to M$ heißt Geodätische falls in einer Karte (U, ϕ) mit $\gamma^a := x^a \circ \gamma$ gilt

$$\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}(s)|_U = \left(\ddot{\gamma}^c(s) + \Gamma^c_{ab}(\gamma(s))\dot{\gamma}^a(s)\dot{\gamma}^b(s)\right)\frac{\partial}{\partial x^c} = 0\,. \tag{12}$$

Wir setzen die Metrik g als mindestens zweimal stetig differenzierbar voraus, so dass die Christoffel-Symbole einmal stetig differenzierbare sind. Dann existiert nach dem Satz von PicardLindelöf für jeden Punkt $p \in M$ und jedes $v \in T_pM$ eine eindeutige Lösung $(-\varepsilon, \varepsilon) \mapsto \gamma(s)$ mit $\gamma(0) = p$ und $\dot{\gamma}(0) = v$, sofern ϵ hinreichend klein gewählt wird.

Zeigen Sie damit, dass für jeden Punkt p eine offene Umgebung $V_p \subset T_pM$ mit $0 \in V_p$ existiert, so dass die eindeutige Lösung $\gamma_{(p,v)}$ zu den Anfangsbedingungen $\gamma_{(p,v)}(0) = p$ und $\dot{\gamma}_{(p,v)}(0) = v \in V_p$ im Intervall $[-1, 1]$ existiert.

Die *Exponentialabbildung* am Punkt p in M ist dann defniert durch

$$\exp_p : V_p \to M\,, \quad v \mapsto \exp_p(v) := \gamma_{(p,v)}(s = 1)\,. \tag{13}$$

Zeigen Sie, dass $\exp_{p*}|_0 = \mathrm{id}_{T_pM}$.

Wählt man in T_pM eine orthonormierte Basis $\{e_1, \cdots, e_n\}$ mit Dualbasis $\{\theta^1, \cdots, \theta^n\}$, so dass also $g_p(e_a, e_p) = \pm\delta_{ab}$, dann definiert die Exponentialabbildung zusammen mit dieser Basis eine Karte (U, ϕ) in einer offenen Umgebung U des Punktes p in M, wobei die Koordinatenfunktionen $x^a : U \to \mathbb{R}$ gegeben sind durch

$$x^a := \theta^a \circ \exp_p^{-1}\ . \tag{14}$$

Man nennt diese Karte ein *Riemann'sches Normalkoordinatensystem* mit Zentrum p. Es gilt natürlich $x^a(p) = 0$ für alle $1 \leq a \leq n$.

Zeigen Sie, dass in dieser Karte die Christoffel-Symbole folgende Bedningung erfüllen

$$\Gamma^c_{ab}(sv)v^a v^b = 0 \tag{15}$$

für alle $v = v^a e_a \in V_p$ und alle $0 \leq s \leq 1$. Folgern Sie daraus, dass für alle $\ell \geq 0$ gilt (die runde Klammer um Indizes bedeutet vollständige Symmetrisierung)

$$\Gamma^b_{(a_1 a_2, a_3 \cdots a_\ell)}(0) = 0\,. \tag{16}$$

Die runde Klammer um Indizes bedeutet vollständige Symmetrisierung), die Indizes nach dem Komma sind Ableitungsindizes, z.B. $\Gamma^b_{a_1 a_2, a_3} := \partial_{a_3}\Gamma^b_{a_1 a_2}$. Da $\Gamma^c_{ab} = \Gamma^c_{(ab)}$ gilt also insbesondere, dass die Christoffel-Symbole am Punkt p verschwinden.