Übungen zur Vorlesung

Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie

von DOMENICO GIULINI

Blatt 8

Aufgabe 1

Wir betrachten einen homogener Stab der konstanten Massensichte ρ, Länge L und quadratischem Querschnitt mit Seitenlänge $s \ll L$. Dieser sei um eine Achse senkrecht zu seiner Längsrichtung durch den Mittelpunkt frei drehbar.

Zeigen Sie, dass sein Trägheitsmoment um diese Achse gegeben ist durch

$$I = \tfrac{1}{12} M L^2 \tag{1}$$

wenn $M = s^2 L \rho$ die Gesamtmeasse ist.

Zeigen Sie weiter, dass bei Drehung des Stabes mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω die in der Mitte des Stabes auftretende Zugspannung gegeben ist durch

$$S = \tfrac{1}{8} \rho (\omega L)^2 \,. \tag{2}$$

Ist S_{max} die Zerreißspannung des Stabmaterials, dann können die Enden des Stabes höchstens mit der Geschwindigkeit

$$v_{\mathrm{max}} = \sqrt{\frac{2\, S_{\mathrm{max}}}{\rho}} \,. \tag{3}$$

Berechnen Sie diese für Federstahl ($\rho = 7{,}8\ \mathrm{g/cm^3}$, $S_{\mathrm{max}} = 1600\ \mathrm{N/mm}$) und Glasfaser ($\rho = 2{,}5\ \mathrm{g/cm^3}$, $S_{\mathrm{max}} = 4800\ \mathrm{N/mm}$).

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die vom Stab in Form von Gravitationswellen abgestrahlte Leistung gegeben ist durch

$$L_{GW}^{(\mathrm{Stab})} = \frac{2}{45} \cdot \frac{G}{c^5} \cdot M^2 L^4 \omega^6 \,. \tag{4}$$

Zeigen Sie, dass diese durch S_{max} nach oben beschränkt ist durch

$$L_{GW}^{(\mathrm{max})} = \frac{1024}{45} \cdot \frac{G}{c^5} \cdot \frac{Q^2 \cdot S_{\mathrm{max}}^3}{\rho} \,, \tag{5}$$

wobei $Q = s^2$ die Querschnittsfläche des Stabes ist. Berechnen Sie diese für für Federstahl und Glasfaser wenn $Q = 1\mathrm{m}^2$.

Aufgabe 2

Wir betrachten wieder den homogenen Stab von Aufgabe 1, interessieren uns aber diesmal für die Amplituden der Gravitationswellen und nicht deren transportierte Energie. Für den Betrag der Amplitude hatten wir in der Vorlesung für die linear-polarisierte Welle bei Blickrichtung in der Rotationsebene folgenden Ausdruck abgeleitet:

$$|h_+| = \frac{2G}{c^4} \cdot \frac{1}{r} \cdot \omega^2 \cdot I_3' \tag{6}$$

wobei I_3' hier durch I in (1) gegeben ist.

Zeigen Sie, dass die Zerreißspannung der Amplitude einer obere Schranke setzt von

$$|h_+|_{\max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{L}{r} \cdot \frac{G \cdot Q \cdot S_{\max}}{c^4} \tag{7}$$

die interessanterweise nicht mehr von ρ abhängt. Schätzen Sie diese für Glasfaser (s. Aufgabe 1) mit $Q = 1\,\mathrm{m}^2$ ab, wenn Sie im Idealfall so nahe wie möglich an das Objekt herangehen, also $r \approx L$ setzen. (Dass Letzteres eigentlich den gemachten Annahmen bei der Ableitung der Formeln für die Amplitude widerspricht, sei hier übergangen.)

Aufgabe 3

In der SRT lauten die Maxwell-Gleichnungen in der Viererschreibweise und in SI-Einheiten so:

$$\partial_{[\lambda} F_{\mu\nu]} = 0\,, \qquad \partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu\,. \tag{8}$$

Dabei fasst die Faraday 2-Form $F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu$ die elektrischen und magnetischen Felder wie folgt zusammen:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1/c & E_2/c & E_3/c \\ -E_1/c & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2/c & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3/c & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Die Komponenten J^μ des Vektorfeldes des elektrischen Viererstroms $J = J^\mu \partial/\partial x^\mu$ sind gegeben durch $(c\rho, \vec{j})$. Die 1-Form des Viererpotentials ist $A = A_\mu\, dx^\mu$, mit Komponenten $A_\mu = (\phi/c, -\vec{A})$. Überzeugen Sie sich davon, dass (8) mit dieser Identifikation tatsächlich die Maxwell-Gleichungen in SI-Einheiten liefert.

Wir lösen die homogene Maxwell-Gleichung durch $F = dA$, wobei $A = A_\mu dx^\mu$ die 1-Form des Viererpotentials ist, mit Komponenten $A_\mu = (\phi/c, -\vec{A})$. Zeigen Sie, dass die inhomogenen Maxwell-Gleichungen dann die Euler-Lagrange Gleichungen folgender Wirkung sind:

$$S_{EM}[A, J] = \int_\Omega dt \wedge d^3x \left(-\tfrac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - A_\mu J^\mu \right). \tag{10}$$

in der $F = dA$ gesetzt ist. Geben Sie Argumente, dass diese Wirkung tatsächlich die physikalisch korrekte Wirkung hinsichtlich Einheiten, Betrag und Vorzeichen ist.

Aufgabe 4

Verallgemeinern Sie (10) auf nicht flache Raumzeiten, einfach indem Sie die Minkowski-Metrik durch die allgemeine Metrik ersetzen. Das geschieht im Integrationsmaß, indem Sie $dt \wedge d^3x = (1/c)d^4x$ durch $(1/c)d\mu(g)$ ersetzen mit $d\mu(g) = \sqrt{-\det\{g_{\mu\nu}\}}dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ (vgl. Aufgabe 1 von Blatt 6), und auch im inneren Produkt der Felder, idem Sie jetzt $F^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}$ setzen. Die 1-Form A sowie die Relation $F = dA$ sind von der Metrik unabhängig und bleiben von dieser Änderung unberührt.

Leiten Sie nun die Maxwell-Gleichungen in einer allgemeinen Raum-Zeit ab, indem Sie die Euler-Lagrange Gleichungen der neuen, von der Metrik abhängigen Wirkung bilden

$$S_{EM}[A, J, g] = \int_\Omega (1/c)d\mu(g) \left(-\tfrac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - A_\mu J^\mu\right) . \tag{11}$$

Sei nun $g(s) = g + sh$ wie in Aufgabe 3 auf Blatt 7 eine einparametrige Schar von Metriken, die Sie in (11) für $J = 0$ verwenden (keine äußeren Quellen). Zeigen Sie,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} S_{EM}[A, g(s)] &= \int_\Omega (1/c)d\mu(g)\frac{1}{2\mu_0}\left(F_{\alpha\mu}F_\beta{}^\mu - \frac{1}{4}g_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)h^{\alpha\beta} \\ &= -\frac{1}{2}\int_\Omega (1/c)d\mu(g)T_{\alpha\beta}h^{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{12}$$

Berechnen Sie die Komponenten des Tensors

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu_0}\left(-F^{\alpha\mu}F^\beta{}_\mu + \frac{1}{4}g^{\alpha\beta}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) , \tag{13}$$

für den Fall, dass g die Minkowski-Metrik ist und geben Sie Argumente, dass es sich um den Energie-Impulstensor des elektromagnetischen Feldes handelt. Zeigen Sie explizit mit Hilfe von (8) für $J^\nu = 0$, dass $\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$. Gilt entsprechend $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$ für allgemeine Metriken, falls F die Maxwell-Gleichungen in der entsprechenden Raum-Zeit erfüllt?