Übungen zur Vorlesung

Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie

von DOMENICO GIULINI

Blatt 1

Aufgabe 1

In seinem letzten Buch, den „Unterredungen“ (‘Discorsi’) von 1638, gibt Galilei eine Überlegung an, die ihm scheinbar streng und ohne Verweis auf ein tatsächlich ausgeführtes Experiment schließen lässt, dass die Fallbeschleunigung eines Körpers im Gravitationsfeld der Erde (Reibungsverluste durch Luftwiderstand werden vernachlässigt) unabhängig von seiner Masse ist.

Galilei argumentiert so: Gegeben zwei Körper K_1 und K_2 mit Massen $m_1 < m_2$. Wir nehmen an (*Ausgangsannahme*), die Schwerebeschleunigung wüchse monoton mit der Masse; dann fiele insbesondere K_2 schneller als K_1. Nun betrachte man den Körper K_3, der entsteht, indem man K_1 und K_2 aneinanderklebt (die Masse des Klebstoffs sei vernachlässigt). Dann müsste nach Voraussetzung, da $m_3 = m_1 + m_2 > m_2$, K_3 noch schneller fallen als vorher K_2, der schwerere der beiden Körper. Andererseits kann man aber auch sagen, dass K_2 durch den angeklebten aber langsamer beschleunigten Körper K_1 an seiner ihm natürlich zukommenden Fallbeschleunigung gehindert wird, so dass K_3 mit einer Beschleunigung fallen sollte, die *zwischen* der von K_1 und K_2 liegt. Das ist aber ein Widerspruch, der die Ausgangsannahme ad absurdum führt. Also muss die Schwerebeschleunigung *unabhängig* von der Masse sein.

Einfach genial – oder?

Beurteilen Sie dieses Argument hinsichtlich möglicher versteckter Annahmen. Beantworten Sie dazu folgende Frage quantitativ: Mit welcher Kraft drückt/zieht ein Körper K auf/an meine/r Handfläche (auf der er angeklebt ist), wenn ich diese im Schwerefeld $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ der Erde mit der Beschleunigung $\vec{g}' = -g'\vec{e}_z$ bewege (g und g' sind hier konstant)? Begründen Sie Ihre Antwort genau, wobei Sie zwischen träger und schwere Masse des Körpers K unterscheiden.

Aufgabe 2

Zwei Massenpunkte bewegen sich nur unter Einfluss ihres Gravitationsfeldes gemäß den Newton’schen Bewegungs- und Gravitationsgesetzen. Dabei soll hier aber streng zwischen träger, passiver-schwerer und aktiver-schwerer Masse unterschieden werden.

Zeigen Sie, dass der Gesamtimpuls genau dann erhalten ist, wenn der Quotient zwischen passiver und aktiver Masse für beide Körper gleich ist. Zeigen Sie weiter, dass in diesem Fall auch ein Energieerhaltungssatz gilt. Geben Sie den Ausdruck für die potentielle Energie explizit an.

Nehmen Sie nun zusätzlich das schwache Äquivalenzprinzip als gültig an, gemäß dem die träge und passive schwere Masse eines Körpers immer gleich sind. Zeigen Sie, dass es dann immer noch mit allem bisher Gesagtem verträglich wäre, wenn alle Massen eines der Körper sämtlich negativ sind, die des anderen sämtlich positiv. Geben Sie eine qualitative Beschreibung der gemeinsamen Bewegung beider Körper in diesem Fall, etwa indem Sie den Fall betrachten, in dem die trägen Massen gleichen Betrag besitzen.

Aufgabe 3

In dieser Aufgabe sind träge und schwere Massen wieder als gleich zu betrachten. Sei ρ die Massendichte und φ das Gravitationspotential. Es gelten die Newton'schen Feldgleichungen

$$\Delta\varphi = 4\pi\, G\, \rho\,. \tag{1}$$

Wir setzen voraus ρ habe kompakten Träger. Zeigen Sie, dass das Raumintegral über ρ gleich ist der aktiven gravitativen Masse M, die definiert ist durch den (geeignet normierten) Fluss des Gravitationsfeldes nach 'Unendlich':

$$M := \lim_{r\to\infty}\left\{\frac{1}{4\pi G}\int_{S^2(r)} \vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{n}\;do\right\}\,. \tag{2}$$

Hier bezeichnet $S^2(r)$ eine 2-Sphäre mit Radius r um den Ursprung.

Die auf die Massenverteilung wirkende Kraftdichte ist

$$\vec{f} = -\rho\,\vec{\nabla}\varphi\,. \tag{3}$$

Zeigen Sie, dass diese als Divergenz eines Tensors t_{ab} geschrieben werden kann (Einsteinsche Summenkonvention für wiederholte Indizes),

$$f_a = -\nabla^b t_{ab}\,, \tag{4}$$

wobei

$$t_{ab} = \frac{1}{4\pi G}\left(\nabla_a\varphi\nabla_b\varphi - \tfrac{1}{2}\delta_{ab}\nabla_c\varphi\nabla^c\varphi\right)\,. \tag{5}$$

Zeigen sie damit, dass die Gesamtkraft, die ein lokalisiertes (ρ hat kompakten Träger) selbstgravitierendes System auf sich ausübt stets verschwindet.

Aufgabe 4

Wie in der Elektrostatik kann auch dem statischen Gravitationsfeld in der Newton'schen Theorie eine Energiedichte ϵ zugeordnet werden, die wegen der Attraktivität der Gravitation allerdings negativ ist:

$$\epsilon(\vec{x}) = \frac{-1}{8\pi G}\|\vec{\nabla}\varphi(\vec{x})\|^2\,. \tag{6}$$

Können Sie diesen Ausdruck ableiten?

Gemäß $E = mc^2$ und der Gleichheit von träger und schwerer Masse könnte man die Newton'schen Feldgleichungen nun dahingehend abändern, dass auch die im Gravitationsfeld lokalisierte 'Massendichte' ϵ/c^2 gleichberechtigt als Quelle auftritt:

$$\Delta\varphi = 4\pi G \left(\rho - \frac{1}{8\pi G c^2} \|\vec{\nabla}\varphi\|^2 \right) . \tag{7}$$

Geben Sie die sphärisch-symmetrische Lösung dieser Gleichung mit asymptotischen Verhalten $\varphi(r \to \infty) \to 0$ zu folgender Dichteverteilung an:

$$\rho(\vec{x}) = \begin{cases} \sigma = \text{konst.} & \text{für } r \leq R\,, \\ 0 & \text{für } r > R\,. \end{cases} \tag{8}$$

(Tipp: Durch die Feldredefinition $\psi := \exp(\varphi/2c^2)$ nimmt (7) eine sehr einfache lineare Form an, mit deren Hilfe Sie die Gleichung für $r > R$ und $r < R$ einfach lösen können. Fordern Sie von der Lösung Endlichkeit bei $r = 0$ und stetige Differenzierbarkeit bei $r = R$.)

Die aktive gravitative Masse M ist weiterhin definiert durch den (geeignet normierten) Fluss des Gravitationsfeldes nach Unendlich, also durch Gleichung (2). Dieses ist nun klarerweise *nicht* mehr gleich dem Raumintegral von ρ. Zeigen Sie für obige Lösung, dass M als Funktion der Dichte σ und des Radius' R folgende Form hat, wobei zur Abkürzung $\omega := \sqrt{2\pi G\sigma/c^2}$ gesetzt ist:

$$M(\sigma, R) = \frac{2c^2 R}{G} \left(1 - \frac{\tanh(\omega R)}{\omega R} \right) . \tag{9}$$

Leiten Sie damit die folgende, von σ unabhängige Ungleichung her:

$$M < \frac{2c^2 R}{G}\,. \tag{10}$$

[Man kann zeigen, dass diese Ungleichung auch dann noch gilt, wenn σ vom Radius r abhängt, d.h. für allgemeine sphärisch-symmetrische Massenverteilungen.] Wie interpretieren Sie dieses Ergebnis? Warum erhöht sich im Gegensatz zur Newton'schen Theorie hier M nicht mehr beliebig, wenn Sie immer mehr Materie in das Gebiet $r < R$ bringen? Gibt es eine Lösung zu (7) mit $\rho(\vec{x}) = \delta^{(3)}(\vec{x})$, analog zur Fundamentallösung $\propto 1/r$ von (1) ?