Übungen zur Vorlesung

Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie

von DOMENICO GIULINI

Blatt 10

Aufgabe 1

Die Masse M sei homogen auf das Volumen eines drei-achsigen Ellipsoids

$$\mathcal{E} := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 \leq 1 \right\} \tag{1}$$

verteilt, so dass sich innerhalb $\mathcal{E}$ die konstante Massendichte $\rho_M = M/V$ ergibt, wo V das Volumen von $\mathcal{E}$ ist.

Berechnen Sie alle zweiten Momente der Massenverteilung

$$M^{mn} := \int_{\mathcal{E}} d^3x \, \rho_M(\vec{x}) \, x^m x^n \tag{2}$$

als Funktion von M, a, b, c. Geben Sie den Trägheitstensor, die Hauptträgheitsachsen und die Hauptträgheitsmomente an.

Aufgabe 2

Wie wir in der Vorlesung noch zeigen werden, ergibt die Quadrupolformel für die Gravitationswellen-Luminosität (Abstrahlungsleistung), angewandt auf einen starren Körper, der sich um die 3. Hauptträgheitsachse mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit Ω dreht, die einfache Formel

$$L_{GW} = \frac{32}{5} \cdot \frac{G}{c^5} \cdot \Omega^6 \cdot (I_1 - I_2)^2 \,. \tag{3}$$

Hier sind I_1 und I_2 die beiden zur Drehachse senkrechten Hauptträgheitsmomente.

Wenden Sie diese auf den Fall zweier gleicher Punktmassen M an, die sich gemäß dem Newton'schen Gravitationsgesetz auf einer Kreisbahn um ihren gemeinsamen Schwerpunkt mit der Winkelgeschwindigkeit Ω im gegenseitigen Abstand D bewegen, und zeigen Sie

$$L_{GW} = \frac{2}{5} \cdot \frac{c^5}{G} \cdot \left(\frac{R_S}{D} \right)^5 \approx 10^{52} \text{ Watt} \cdot \left(\frac{R_S}{D} \right)^5 , \tag{4}$$

wobei $R_S := 2GM/c^2$.

Tipp: Das 3. Kepler'sche Gesetz ergibt sich im vorliegenden Fall einfach aus der Gleichheit der Beträge von Gravitations- und Zentrifugalkraft. Aus ihm kann man Ω als Funktion von M und D ausdrücken.

Zeigen Sie, dass die Gesamtenergie des Systems gegeben ist durch

$$E = \tfrac{1}{2}E_{\text{pot}} = -G \cdot \frac{M^2}{2D} \,. \tag{5}$$

Zeigen Sie damit: Änder sich die Energie durch GW-Abstrahlung, allerdings so langsam, dass zu jedem Zeitpunkt noch dynamisches Gleichgewicht herrscht (adiabatischer Prozess), so gilt

$$\frac{\dot{E}}{E} = -\frac{\dot{D}}{D} = \frac{2}{3}\,\frac{\dot{\Omega}}{\Omega} = -\frac{2}{3}\,\frac{\dot{P}}{P}\,, \tag{6}$$

wobei $P = 2\pi/\Omega$ die Periodendauer des Systems ist.

Berechnen Sie damit $\dot{P}$ als Funktion von P und M und lösen Sie die so entstehende Differentialgleichung für $P(t)$ (M ist konstant). Leiten Sie aus dieser eine Formel für die Lebensdauer des Systems ab.

Berechnen Sie L_{GW}, $\dot{P}$ und die Lebensdauer für $P = 7,75\,h$ (h = Stunde) und $M = 1,4\,M_\odot$. Vergleichen Sie $\dot{P}$ mit dem gemessenen Wert des Hulse-Taylor-Pulsars $PSR\,1913+16$, der gerade die angegebenen Werte für P und M besitzt. Welche der in dieser Aufgabe gemachten idealisierenden Annahmen treffen auf diesen Pulsar eher nicht zu?