Übungen zur Vorlesung

Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie

von DOMENICO GIULINI

Blatt 11

Aufgabe 1

Ein homogener Stab der Masse M, Länge L und von quadratischem Querschnitt $q = a^2$ der Seitenlänge a rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um eine Achse durch den Mittelpunkt und senkrecht zur Symmetrieachse. In der Vorlesung wurde folgende Formel für für die GW-Luminosität abgeleitet (unter der Voraussetzung $a \ll L$, so dass das Hauptträgheitsmoment um die Symmetrieachse gegenüber den anderen vernachlässigbar ist)

$$L_{GW}^{(\mathrm{Stab})} = \frac{2}{45} \cdot \frac{G}{c^5} \cdot \omega^6 \cdot M^2 \cdot L^4 \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass die aufgrund der Drehung auftretende Zugspannung (Kraft pro Fläche) in der Mitte des Stabes gegeben ist durch

$$\sigma = \tfrac{1}{2}\rho v^2 \,. \tag{2}$$

Dabei ist $\rho = M/(qL)$ die Massensichte im Innern des Stabes und $v = \omega L/2$ die Geschwindigkeit der Stabenden.

Zeigen Sie weiter: Ist der Stab aus einem Material, dessen Zerreißspannung durch σ_{max} gegeben ist, so ist $L_{GW}^{(\mathrm{Stab})}$ nach oben beschränkt durch

$$L_{(max)} = \frac{1024}{45} \cdot \frac{G}{c^5} \cdot \frac{q^2 \cdot \sigma_{max}^3}{\rho} \,. \tag{3}$$

Typische Werte sind

$\star$	ρ	σ_{max}
Stahl	$7,85\ \mathrm{g/cm^3}$	$2100\ \mathrm{N/mm^2}$
Glasfaser	$2,5\ \mathrm{g/cm^3}$	$4800\ \mathrm{N/mm^2}$

Berechnen Sie jeweils L_{GW}^{max} und die zugehörige maximale Geschwindigkeit v_{max} der Stabenden. Beachten Sie: Beide sind bei vorgegebenem Stabmaterial von der Länge L des Stabes unabhängig.

Aufgabe 2

Wir betrachten wieder den rotierenden Stab aus Aufgabe 2, interessieren uns aber nun für die Amplitude der Gravitationswelle. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Amplitude der zirkular polarisierten Welle, die parallel zur Rotationsachse abgestrahlt wird, gegeben ist durch

$$A(r) = \frac{4G\omega^2}{c^4} \cdot \frac{1}{r} \cdot I_3' \tag{4}$$

wobei für den Stab $I_3' = \frac{1}{12}ML^2$. Zeigen Sie nun, dass diese nach oben beschränkt ist durch

$$A_{max}(r) = \frac{L}{r} \cdot \underbrace{\frac{8}{3}\frac{Gq\sigma_{max}}{c^4}}_{A_*} . \tag{5}$$

Beachten Sie: Im Gegensatz zu (3) hängt dieser Ausdruck nicht von ρ ab!

Berechnen Sie A_* für Stahl und Glasfaser und ziehen Sie Schlüsse hinsichtlich der Möglichkeit, detektierbare Gravitationswellen im Labor zu erzeugen. Diskutieren Sie Ideen, diese Lage zu verbessern!

Aufgabe 3

Betrachten Sie in Newtonscher Näherung den freien radialen Fall einer Punktmasse m auf einen Zentralkörper der Masse $M \gg m$ mit sphärisch-symmetrischer Massenverteilung und Radius R. Berechnen Sie nach der Quadrupolformel die Strahlungsleistung und zeigen Sie, dass die gesamte, während eines freien Falls von $r = \infty$ nach $r = R$ abgestrahlte Energie gegeben ist durch ($R_S := 2GM/c^2$)

$$\Delta E = mc^2 \cdot \frac{2}{105} \cdot \frac{m}{M} \cdot \left(\frac{R_S}{R}\right)^{7/2} . \tag{6}$$

(Argumentieren Sie zuerst, dass man für $M \gg m$ die Bewegung der Zentralmasse vernachlässigen kann.) Was erhält man daraus als Abschätzung für den freien Fall in ein Schwarzes Loch ($R = R_S$)?