Übungen zur Vorlesung

Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie

von DOMENICO GIULINI

Blatt 12

Aufgabe 1

In der Vorlesung wurde die äußere Schwarzschildmetrik als eindeutige, sphärisch-symmetrische Lösung der Einstein'schen Feldgleichungen für $T_{\alpha\beta} = 0$ und $\Lambda = 0$ abgeleitet:

$$g = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2\big(d\theta^2 + \sin^2(\theta)\, d\varphi^2\big)\,. \tag{1}$$

Hier ist $m = GM/c^2$, wobei M die Masse des Zentralkörpers bezeichnet. Wir nehmen an, diese Metrik sei auch für $r < 2m$ gültig, d.h. bei dem zentralen Objekt handle es sich um ein Schwarzes Loch.

Beweisen Sie: Jede zeitartige Kurve in der Raum-Zeit (Weltline), die $r = 2m$ mit $r = 0$ verbindet, hat eine Länge kürzer als

$$s_{\max} = \pi \cdot m\,, \tag{2}$$

so dass die Eigenzeit, eines durch den Horizont $r = 2m$ in die Singularität $r = 0$ fallenden Beobachters nach oben beschränkt ist durch $\tau_{\max} = \pi \cdot m/c$. Beachten Sie: Dies gilt unabhängig davon, ob die Weltlinie Geodätische ist oder nicht. Berechnen Sie damit die maximale Lebendsauer eines in das Galaktische Schwarze Loch $M = 4 \times 10^6\, M_\odot$ fallenden Beobachters nach Durchtritt durch den Horizont $r = 2m$.

Tipp: Um (2) abzuleiten gehen Sie von der Gleichung

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2\big(\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta)\, \dot{\varphi}^2\big) = 1 \tag{3}$$

aus, die für jede zeitartige Wetlinie $x^\alpha(s) = \big(t(s), r(s), \theta(s), \varphi(s)\big)$ gilt, die nach der Eigenlänge s parametrisiert ist. Zeigen Sie zuerst: Gilt $r(s_0) = 2m$, wobei $r(s) > 2m$ für $s < s_0$ und $r(s) < 2m$ für $s > s_0$, dann $\dot{r}(s) < 0$ für alle $s > s_0$. Beweisen Sie dann, dass $(-\dot{r}) > c\sqrt{(2m/r) - 1}$ und daraus (2) durch Integration.

Aufgabe 2

Stellen Sie für die Schwarzschildgeometrie (1) die Gleichung einer radialen Geodätischen auf. Zeigen Sie durch deren Integration, dass die Eigenzeit eines Beobachters, der sich aus dem Zustand der Ruhe $\dot{r} = 0$ bei $r = R > 2m$ nach $r = 2m$ frei fallen lässt, gegeben ist durch

$$\tau(R) = \frac{R}{c} \cdot \sqrt{1 - \frac{2m}{R}} + \frac{R}{2c} \cdot \sqrt{\frac{R}{2m}} \cdot \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{4m}{R} - 1\right)\right] . \qquad (4)$$

Insbesondere ist diese Zeit endlich für alle $R > 2m$.

Zeigen Sie dann auch, dass die radiale Geodätische den Horizont $r = 2m$ bei keinem endlichen Wert von t schneidet und dass daraus folgt, dass ein statischer Beobachter bei $r > 2m$ den frei fallenden Beobachter zu keiner endlichen Eigenzeit (des statischen Beobachters) durch den Horizont treten sieht. Was sieht er sattdessen?

Aufgabe 3

Statt r führen wir in (1) eine neue Radialkoordinate r_* ein durch

$$r_*(r) := \int_0^r \frac{dr'}{1 - \frac{2m}{r'}} . \qquad (5)$$

Schreiben Sie die Metrik in den Koordinaten $(t, r_*, \theta, \varphi)$. Diskutieren Sie das Verhalten bei $r = 2m$. Was ist z.B. mit $\det\{g_{\alpha\beta}\}$?

Alternativ, ersetzen Sie die Koordinate t in (1) durch $u := ct - r_*(r)$ oder $v = ct + r_*(r)$ und schreiben Sie die Metrik in den Koordinaten (u, r, θ, φ) bzw. (v, r, θ, φ). Beobachten Sie, dass die scheinbaren Singularitäten bei $r = 2m$ in den Koeffizientenfunktionen der Metrik vollständig verschwunden sind. (Was ist jetzt mit $\det\{g_{\alpha\beta}\}$?) Wie ist das möglich? (Sehen Sie sich die Jacobi-Matrix der Koordinatentransformation an). Haben Sie eine geometrische Interpretation der Koordinaten u und v?