Übungen zur Vorlesung

Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie

von DOMENICO GIULINI

Blatt 3

Vorbereitung (vgl. Vorlesung)

In der Speziellen Relativitätstheorie beschreibt man die Verteilung von Energie und Impuls eines materiellen Systems durch den Energie-Impuls-Tensor. Seine kontravarianten Komponenten haben folgende Bedeutung ($\mu, \nu \in \{0,1,2,3\}$):

$$\{T^{\mu\nu}\} \equiv \begin{pmatrix} T^{00} & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\ T^{10} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{20} & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{30} & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W & cG^1 & cG^2 & cG^3 \\ S^3/c & \Sigma^{11} & \Sigma^{12} & \Sigma^{13} \\ S^3/c & \Sigma^{21} & \Sigma^{22} & \Sigma^{23} \\ S^3/c & \Sigma^{31} & \Sigma^{32} & \Sigma^{33} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Dabei bezeichnen: W die Energiedichte, $\vec{S} := (S^1, S^2, S^3)$ die Komponenten der Energiestromdichte, $\vec{G} := (G^1, G^2, G^3)$ die Komponenten der Impulsdichte und Σ^{mn} ($m, n \in \{1,2,3\}$) die Komponenten der Impulsstromdichte. Meist (aber nicht immer) wird der Energie-Impistensor als symmetrisch angenommen, was u.a. dann $\vec{G} = \vec{S}/c^2$ impliziert.

Die vier Gleichungen

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \tag{2}$$

drücken die lokale Erhaltung von Energie und Impuls aus. Es ist $\partial_\mu := \partial/\partial x^\mu$ und $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ mit $x^0 = ct$).

Eine ideale Flüssigkeit wird beschrieben durch fünf reellwertige Funktionen der Raumzeit-Koordinaten. Diese sind: 1) Die Massendichte ρ, 2) der Druck p und 3) die drei Komponenten $\vec{v}$ der Geschwindigkeit der Flüssigkeit bezogen auf ein geeignetes Referenzsystem. Sie heißt „ideal“ weil in ihr neben konvektiven keine weiteren Energieströme auftreten (keine Wärmeleitung) und sie keine Scherkräfte unterstützt. Das bedeutet, dass im lokalen Ruhesystem der Flüssigkeit die Energiestromdichte und die Impulsdichte verschwinden und die Impulstromdichten (Spannungen) isotrop sind, d.h. die Matrix Σ^{mn} proportional zur Einheitsmatrix δ^{mn} ist.

Im Rahmen der SRT bleiben diese Funktionen sinvoll, allerdings ist zu berücksichtigen, dass ρ und p keine skalare Funktionen sind, sich also bei Lorentztransformationen $x \mapsto x' := Lx$ *nicht* transformieren wie $f \mapsto f' := f \circ L^{-1}$ (skalares Transformationsverhalten). Deshalb definiert man die Funktionen ρ und p gerne als Massendichte und Druck *bezogen auf das lokale Ruhesystem* der Flüssigkeit. Die Geschwindigkeitskomponenten $\vec{v}$ fasst man wie in der SRT üblich zur Vierergeschwindigkeit $\{u^\mu\} = (c\gamma, \gamma\vec{v})$ zusammen, wo $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Die Minkowski-Metrik ist in Komponenten bezüglich einer inertialen Basis gegeben durch $\{\eta_{\mu\nu}\} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ und es gilt $\eta(u, u) = u^\mu u^\nu \eta_{\mu\nu} = c^2$.

Aufgabe 1

Der Energie-Impulstensor einer idealen Flüssigkeit ist gegeben durch

$$T^{\mu\nu} = \rho\, u^\mu u^\nu + \left(-\eta^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu/c^2\right)\, p\,. \tag{3}$$

Zeigen Sie, dass dieser Energie-Impulstensor ein System beschreibt, dass im lokal mit der Vierergeschwindigkeit u bewegten System folgende Eingenschaften hat: 1) Die Energiedichte ist $W = \rho c^2$, 2) die Energiestromdichte verschwindet, 3) die Impulsdichte verschwindet, die Impulsstromdichte ist isotrop und gegeben durch $\{\Sigma^{mn}\} = \mathrm{diag}(p, p, p)$. Insbesondere treten in der Flüssigkeit keine Scherkräfte auf.

Aufgabe 2

Zeigen Sie dass die Gleichungen (2) angewandt auf (3) in folgender Form geschrieben werden können:

$$\begin{aligned} \partial_\mu T^{\mu\nu} = {} & \dot{u}^\nu\left(\rho + p/c^2\right) + \left(-\eta^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu/c^2\right)\partial_\mu p \\ & + u^\nu \left[\partial_\mu\left(u^\mu(\rho + p/c^2)\right) - \dot{p}/c^2\right], \end{aligned} \tag{4}$$

wobei der Punkt immer die Ableitung nach der Eigenzeit der Integralkurve des Vektorfeldes u bezeichnet, also $\dot{u}^\nu := u^\mu \partial_\mu u^\nu$ und $\dot{p} := u^\mu \partial_\mu p$.

Argumentieren Sie nun, dass das Verschwinden von $\partial_\mu T^{\mu\nu}$ äquivalent ist zu

$$\dot{u}^\nu\left(\rho + p/c^2\right) + \left(-\eta^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu/c^2\right)\partial_\mu p = 0\,, \tag{5a}$$

$$\partial_\mu\left(u^\mu \rho\right) + (p/c^2)\,\partial_\mu u^\mu = 0\,. \tag{5b}$$

Zeigen Sie, dass in Fall verschwindenden Drucks aus diesen Gleichungen folgt, dass ρu ein erhaltener Strom ist und die Integralkurven von u Geodätische in der Minkowski-Geometrie sind. Wie interpretieren Sie die Tatsache, dass im allgemeinen Fall gemäß (5b) der Ruhemasse-Strom ρu nicht erhalten ist wenn der Druck von Null verschieden und die Strömung nicht „inkompressibel“ (im Sinne von $\partial_\mu u^\mu = 0$) ist?

Aufgabe 3

(Achtung: Sie haben es hier mit Distributionen zu tun. $\delta^{(4)}$ bezeichnet die Dirac-Distribution im Minkowskiraum bezüglich des gewöhnlichen Lebesgue-Maßes.)

Die Viererstromdichte einer Punktladung e, die sich auf einer Weltlinie $z(\tau)$ im Minkowskiraum bewegt (τ ist die Eigenzeit), ist gegeben durch

$$j^\mu(x) = e \int d\tau\, \delta^{(4)}\left(x - z(\tau)\right) \dot{z}^\mu(\tau)\,. \tag{6}$$

Zeigen Sie, dass $\partial_\mu j^\mu = 0$ (im Sinne einer Distribution).

Der Energie-Impuls-Tensor einer Punktmasse m, die sich entlang $z(\tau)$ bewegt, ist

$$T^{\mu\nu}(x) = m \int d\tau\, \delta^{(4)}\left(x - z(\tau)\right)\, \dot{z}^\mu(\tau) \dot{z}^\nu(\tau)\,. \tag{7}$$

Zeigen Sie, dass $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ (im Sinne einer Distribution) genau dann gilt, wenn die Weltline $\ddot{z}^\mu = 0$ genügt, also beschleunigungsfrei ist (d.h. im Minkowskiraum eine Gerade ist).

Aufgabe 4

Sei (V, η) ein reeller $n > 2$ dimensionaler Vektorraum mit Lorentzmetrik (d.h. η ist eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform der Signatur $(1, -1, \cdots, -1)$). Sei $T : V \to V$ eine bezüglich η symmetrische lineare Abbildung, d.h. es gilt $\eta(Tv, w) = \eta(v, Tw)$ für alle $v, w \in V$. Ein Vektor $v \in V - \{0\}$ heißt zeitartig/raumartig/lichtartig falls $\eta(v, v)$ größer/kleiner/gleich Null ist.

Zeigen Sie: Ist $v \in V$ eigenvektor zu T, dann ist auch der $(n-1)$-dimensionale Unterraum $\{v\}^\perp := \{w \in V : \eta(w, v) = 0\} \subset V$ unter T invariant (als Menge, nicht punktweise). Was bedeutet das geometrisch, wenn T einen lichtartigen Eigenvektor besitzt?

Zeigen Sie weiter: Es existiert genau dann eine η-orthogonale Basis von V die T diagonalisiert, wenn T einen zeitartigen Eigenvektor besitzt. (Achtung: Zeigen Sie zunächst, dass eine η-orthogonale Basis keinen lichtartigen Vektor enthalten kann.)

Wenden Sie dieses Ergebnis auf einen symmetrischen Energie-Impulstensor an. Was bedeutet es physikalisch, dass dieser (aufgefasst als lineare Abbildung, nicht als Bilinearform) einen zeitartigen Eigenvektor besitzt? Muss das immer erfüllt sein? Denken Sie beispielsweise an den Energie-Impulstensor einer ebenen elektromagnetischen Welle im Vakuum. Was kann man da über die Energiestromdichte sofort sagen ohne etwas zu rechnen oder auch nur zu wissen, wie dieser Tensor als Funktion der Felder überhaupt aussieht?