Übungen zur Vorlesung

Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie

von Domenico Giulini

Blatt 4

Wiederholung aus der Vorlesung

In der Vorlesung hatten wir eine SRT-konforme skalare Gravitationstheorie diskutiert, die auf folgenden Gleichungen (Feld- und Bewegungsgleichungen für Testteilchen) beruht:

$$\Box\varphi = -\frac{4\pi G}{c^2}\,T^{\mu}_{\mu}\,, \tag{1a}$$

$$\ddot{z}^{\mu}(\tau) = \Big(\eta^{\mu\nu} - \dot{z}^{\mu}(\tau)\dot{z}^{\nu}(\tau)/c^2\Big)\,\partial_\nu\Phi\,. \tag{1b}$$

Der Zusammenhang zwischen φ und Φ ist

$$\Phi = c^2\,\ln\big(1+\varphi/c^2\big)\,. \tag{1c}$$

Für den Spezialfall statischer Potentiale, in dem also φ und Φ nicht von t abhängen, wurde ferner gezeigt, dass (1b) äquivalent ist zu

$$\vec{z}''(t) = -\Big(1-\|\vec{z}'(t)\|^2/c^2\Big)\,\vec{\nabla}\Phi\big(\vec{z}(t)\big)\,. \tag{2a}$$

Durch skalare Multiplikation mit $\vec{z}'$ und Integration folgt daraus (s. Vorlesung) für $\gamma(t) := 1/\sqrt{1-\|\vec{z}'(t)\|^2/c^2}$

$$\gamma(t) = \gamma_0\,\exp\big(-\Phi(\vec{z}(t))/c^2\big)\,, \tag{2b}$$

so dass Gleichung (2a) ihrerseits äquivalent ist zu

$$\vec{z}''(t) = -\vec{\nabla}\tilde{\Phi}\big(\vec{z}(t)\big)\,, \tag{2c}$$

mit

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi} &= \tfrac{1}{2}c^2\gamma_0^{-2}\,\exp\big(2\Phi/c^2\big)\\ &= \tfrac{1}{2}c^2\gamma_0^{-2}\,\big(1+\varphi/c^2\big)^2\,.\end{aligned} \tag{2d}$$

Aufgabe 1

Wir betrachten den Spezialfall eines statischen und homogenen Gravitationsfeldes in negativer z-Richtung. Das Potential ist dann

$$\varphi(z) = gz\,, \tag{3}$$

wobei g eine Konstante mit der Dimension einer Beschleunigung ist. Dieses löst Gleichung (1a) für $T^{\mu}_{\mu} = 0$.

Wir schreiben $z^{\mu}(\tau) = \big(ct(\tau), x(\tau), y(\tau), z(\tau)\big)$. Zeigen Sie, dass (1b) äquivalent ist zu

$$\ddot{t} = -\dot{t}\dot{\Phi}/c^2\,, \tag{4a}$$

$$\ddot{x} = -\dot{x}\dot{\Phi}/c^2\,, \tag{4b}$$

$$\ddot{y} = -\dot{y}\dot{\Phi}/c^2\,, \tag{4c}$$

$$\ddot{z} = -(1+\dot{z}^2/c^2)\Phi'\,. \tag{4d}$$

Dabei ist $\Phi' = d\Phi/dz$ und $\dot{\Phi} = \dot{z}\Phi' = d\Phi(z(\tau))/d\tau$.

Integrieren Sie diese Gleichungen mit den Anfangsbedingungen $t = x = y = z = 0$ und $\dot{t} = \gamma_0$, $\dot{x} = c\beta_0\gamma_0$, $\dot{y} = \dot{z} = 0$ für $\tau = 0$. Diese ensprechen einem Teilchen, das zur Inertialzeit $t = 0$ im Koordinatenursprung mit der Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0 = c\beta_0\vec{e}_x$ losgelassen wird. Es ist $\gamma_0 = (1-\beta_0^2)^{-1/2}$.

Gehen Sie dabei so vor: Die ersten drei Gleichungen (4a)-(4c) sind alle von gleicher Struktur. Sie können Sie unter Beachtung der Anfangsbedingungen sofort einmal integrieren zu

$$\big(\dot{t}(\tau)\,,\,\dot{x}(\tau)\,,\,\dot{y}(\tau)\big) = \big(1\,,\,c\beta_0\,,0\big)\gamma_0\ \exp\big(-\Phi(z(\tau))/c^2\big)\,. \tag{5}$$

Die letzte Gleichung (4d) enthält t, x, y nicht, ist also eine ungekoppelte Differentialgleichung 2. Ordnung für $z(\tau)$. Diese können Sie mit dem üblichen Trick (Multiplikation mit $\dot{z}$) sofort einmal und dann ein zweites Mal integrieren. Sie erhalten so die Funktionen $\dot{z}(\tau)$ und $z(\tau)$. Mit dem bereits erhaltenen Ausdruck für $\dot{t}(\tau)$ aus (5) bilden Sie dann $\dot{z}/\dot{t}$ und erhalten so dz/dt als Funktion von t. Integration davon liefert $z(t)$.

Invertieren Sie die so erhaltenen Funktionen $z(\tau)$ und $z(t)$ und berechnen Sie so die Eigenzeit τ_h und die Inertialzeit t_h, die das Teilchen benötigt, um eine vertikale Distanz h von $z = 0$ (zu Beginn) nach $z = -h$ zu fallen.

Es ergibt sich folgendes Resultat:

$$\tau_h = \frac{c}{g}\sqrt{1-\big(1-gh/c^2\big)^2}\,, \tag{6a}$$

$$t_h = \frac{2c}{g}\,\gamma_0\ \arcsin\left(\sqrt{\frac{gh}{2c^2}}\right)\,. \tag{6b}$$

Diskutieren Sie, wie dieses Ergebnis zu folgender Schilderung Einsteins aus dem Jahr 1933 passt (Gibson-Lecture an der Universität Glasgow), in der er über seinen gedanklichen Weg zur ART berichtete:

„Das einfachste war natürlich, das Laplacesche skalare Potential der Gravitation beizubehalten und die Poisson Gleichung durch ein nach der Zeit differenziertes Glied in naheliegender Weise so zu ergänzen, dass der speziellen Relativitätstheorie Genüge geleistet wurde. Auch musste das Bewegungsgesetz des Massenpunktes im Gravitationsfeld der speziellen Relativitätstheorie angepasst werden. Der Weg hierfür war weniger eindeutig vorgeschrieben, weil ja die träge Masse eines Körpers vom Gravitationspotential abhängen konnte. Dies war sogar wegen des Satzes von der Trägheit der Energie zu erwarten. [...] Solche Untersuchungen führten aber zu einem Ergebnis, das mich in hohem Maße misstrauisch machte. Gemäß der klassischen Mechanik ist nämlich die Vertikalbeschleunigung eines Körpers im vertikalen Schwerefeld von der Horizontalkomponente der Geschwindigkeit unabhängig. Hiermit hängt es zusammmen, dass die Vertikalbeschleunigung eines mechanischen Systems bzw. dessen Schwerpunktes in einem solchen Schwerefeld unabhängig herauskommt von dessen innerer kinetischer Energie. Nach der von mir versuchten Theorie war aber die Unabhängigkeit der Fallbeschleunigung von der Horizontalgeschwindigkeit bzw. der inneren Energie eines Systems nicht vorhanden. Dies passte nicht zu der alten Erfahrung, dass die Körper alle dieselbe Beschleunigung in einem Gravitationsfeld erfahren. Dieser Satz, der auch als Satz über die Gleichheit der trägen und schweren Masse formuliert werden kann, leuchtete mir nun in seiner tiefen Bedeutung ein. Ich wunderte mich im höchsten Grade über sein Bestehen und vermutete, dass in ihm der Schlüssel für ein tieferes Verständnis der Trägheit und Gravitation liegen müsse. An seiner strengen Gültigkeit habe ich auch ohne Kenntnis des Resultates der schönen Versuche von Eötvös, die mir – wenn ich mich richtig erinnere – erst später bekannt wurden, nicht ernsthaft gezweifelt. Nun verwarf ich den Versuch der oben angedeuteten Behandlung des Gravitationsproblems im Rahmer der speziellen Relativitätstheorie als inadäquat. Er wurde offenbar gerade der fundamentalsten Eigenschaft der Gravitation nicht gerecht. [...] Wichtig war zunächst nur die Erkenntnis, dass eine vernünftige Theorie der Gravitation nur von einer Erweiterung des Relativitätsprinzips zu erwarten war.“

Aufgabe 2

Wir betrachten nun einen weiteren Spezialfall, nämlich den eines statischen und sphärisch-symmetrischen Gravitationsfeldes außerhalb der Quelle. Das Potential ist dann

$$\varphi(\vec{x}) = -\frac{GM}{r} \tag{7}$$

mit $r := \|\vec{x}\|$. Dieses löst Gleichung (1a) mit $T^\mu_\mu = 0$ für $r > 0$.

Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 1 von Blatt 2, dass die Bewegungsgleichungen (1b) zu einer Periastronpräzession pro Umlauf von (Bezeichnung wir auf Blatt 2)

$$\Delta\varphi = -\pi \, \frac{GM/c^2}{a(1-\varepsilon^2)} \,. \tag{8}$$

Das ist $(-1/6)$ des Wertes, den die ART liefern wird.

Tipp: Gehen Sie von (2c) und (2d) aus.