Übungen zur Vorlesung

Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie

von Domenico Giulini

Blatt 5

Aufgabe 1

Oft stellt man an den Energie-Impulstensor T, der hier aufgefasst wird als lineare Abbildung (ein Index oben einer unten), eine sogenannte *Energiebedingung*. Die gängigsten dieser Bedingungen fordern, dass für jeden zeitartigen Vektor v gilt (η ist die Metrik):

$$\begin{aligned} &\eta(v, Tv) \geq 0 && \text{(schwache Energiebedingung)}, && \text{(1a)}\\ &\eta(v, Tv) - \tfrac{1}{2}\eta(v,v)\mathrm{Spur}(T) \geq 0 && \text{(starke Energiebedingung)}, && \text{(1b)}\\ &\eta(Tv, Tv) \geq 0 \leq \eta(v, Tv) && \text{(Energiedominanzbedingung)}. && \text{(1c)} \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass angewandt auf eine ideale Flüssigkeit diese Bedingungen äquivalent sind zu:

- Schwache Energiebedingung

$$\rho \geq 0 \quad \text{und} \quad p \geq -\rho c^2 \,. \tag{2a}$$

- Starke Energiebedingung

$$p \geq \begin{cases} -\rho c^2/3 & \text{falls } \rho \geq 0, \\ -\rho c^2 & \text{falls } \rho < 0. \end{cases} \tag{2b}$$

- Energiedominanzbedingung

$$\rho \geq 0 \quad \text{und} \quad -\rho c^2 \leq p \leq \rho c^2 \,. \tag{2c}$$

Aufgabe 2

Die Bezeichnungen und Verhältnisse seien wie in Aufgabe 2. Wir bezeichnen ferner mit $Z = \{v \in V : \eta(v,v) > 0\} \subset V$ die Menge der zeitartigen Vektoren. Zeigen Sie, dass diese in zwei jeweils konvexe Zusammenhangskomponenten zerfällt, $Z = Z_+ \cup Z_-$, und dass gilt: Ist $n \in Z_+$ und $v \in Z$, dann $v \in Z_\pm \Leftrightarrow \eta(n, v) \gtrless 0$. Zeigen sie weiter, dass die Energiedominanzbedingung (1c) äquivalent der Bedingung ist, dass $T : V \to V$ die Zusammenhangskomponenten $Z_\pm$ jeweils auf sich abbildet. Wegen der Stetigkeit der Abbildung T gilt dies dann auch für deren Abschlüsse $\bar{Z}_\pm$. Sei $\{e_0, e_1, \cdots, e_{n-1}\}$ eine bezüglich η orthonormierte Basis von V mit zeitartigem

e_0. Beweisen Sie nun, dass die Energiedominanzbedingung folgende Ungleichungen impliziert

$$T_{00} \geq |T_{ab}| \tag{3}$$

für alle $a, b \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$, wobei $T_{ab} := \eta(e_a, Te_b)$. Tipp: Betrachten Sie Ausdrücke der Form $\eta\big(e_0 \pm e_a, T(e_0 \pm e_b)\big)$ und $\eta\big(e_0, T(e_0 \pm e_a)\big)$. Kann man auch umgekehrt schließen, dass aus der Gültigkeit von (3) bezüglich einer fest gewählten η-orthonormierten Basis die Energiedominanzbedingung folgt?

Aufgabe 3

Sei M eine Mannigfaltigkeit mit Metrik g beliebiger Signatur. Zeigen Sie durch explizites Nachrechnen der Euler-Lagrange Gleichungen, dass die stationären Punkte des Energiefunktionals

$$\mathcal{E}[\gamma] := \tfrac{1}{2} \int d\lambda \; g_{\mu\nu}\big(z(\lambda)\big)\, z'^{\mu}(\lambda) z'^{\nu}(\lambda) \tag{4}$$

Geodätische (siehe Vorlesung) sind. Zeigen Sie weiter durch explizites Nachrechnen, dass für diese der Integrand von (4) unabhängig von λ ist.

Aufgabe 4

Auf der Einheitssphäre $S^2_1 := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\vec{x}\| = 1\}$ führen wir (im Komplement des Nullmeridians) wie üblich Polarkoordinaten $x^1 = \theta$ und $x^2 = \varphi$ ein. Dann ist

$$g_{ab}(z) z'^a z'^b = \theta'^2 + \sin^2(\theta)\, \varphi'^2 \,. \tag{5}$$

Zeigen Sie, dass die Geodätischen genau die affin parametrisierten Großkreise (oder Stücke von diesen) sind. Zeigen Sie dies einerseits anhand der Euler-Lagrange Gleichungen des Energiefunktionals , indem Sie von der Tatsache Gebrauch machen, dass diese alle räumlichen Drehungen als Symmetrien besitzen.

Auf der anderen Seite können Sie auch ohne Rechnung mit Hilfe einer Spiegelsymmetrie nach folgendem Schema argumentieren: Unter einer Spiegelung an einer Ebene duch den Ursprung (etwa der $z = 0$ Ebene) bleibt ein Großkreis (hier der Äquator) punktweise fest. Der Großkreis ist also eine Fixpunktmenge einer Isometrie (denn er stellt eine Isometrie im euklidischen $\mathbb{R}^3$ dar, dessen Geometrie die der Sphäre induziert). Unter einer Isometrie wird aber eine Geodätische auf eine Geodätische abgebildet (warum?). Betrachte nun eine Geodätische, die auf und tangential zum Großkreis startet. Würde sie nicht mit dem Großkreis identisch sein, so wäre ihr Bild unter der Spiegelung eine andere Geodätische mit gleichen Anfangsort und gleicher Anfangsgeschwindigkeit. Das ist aber unmöglich, weil ......