Übungen zur Vorlesung

Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie

von DOMENICO GIULINI

Blatt 6

Aufgabe 1

Diese Aufgabe dient nur der Wiederholung. Sie ist im Wesentlichen identisch zu Aufgabe 3 von Blatt 5 und soll nicht nochmal vorgerechnet werden.

Das Energiefunktional einer Bahnkurve $\lambda \mapsto x(\lambda)$ auf einer Raumzeit (M, g) ist

$$\mathcal{E}[x] = \frac{1}{2}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \, g_{\alpha\beta}\big(x(\lambda)\big)\, \dot{x}^\alpha(\lambda)\dot{x}^\beta(\lambda)\,. \tag{1}$$

Dabei bezeichnet ein Punkt die Ableitung nach λ.

Zeigen Sie, dass die Euler-Lagrange Gleichungen äquivalent sind der Geodätengleichung

$$\ddot{x}^\mu(\lambda) + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\big(x(\lambda)\big)\, \dot{x}^\alpha(\lambda)\dot{x}^\beta(\lambda) = 0\,. \tag{2}$$

Zeigen Sie weiter: Erfüllt eine Bahnkurve $x(\lambda)$ die Gleichung (2), dann gilt

$$\frac{d}{d\lambda}\Big(g_{\alpha\beta}\big(x(\lambda)\big)\, \dot{x}^\alpha(\lambda)\dot{x}^\beta(\lambda)\Big) = 0\,. \tag{3}$$

Der Integrand des Energiefunktionals ist also entlang der Lösungskurve konstant. Geodätische (Lösungskurven der Geodätengleichung) sind also an jedem Punkt stets entweder zeitartig ($g(\dot{x}, \dot{x}) > 0$), lichtartig ($g(\dot{x}, \dot{x}) = 0$) oder raumartig ($g(\dot{x}, \dot{x}) < 0$).

Außerdem folgt: Die Lösungskurve $x^\mu(\lambda)$ bleibt nach Umparametrisierung $\lambda \to \lambda' := f(\lambda)$ genau dann Lösungskurve von (2), wenn f die Form hat $f(\lambda) = a\lambda + b$ mit $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ und $b \in \mathbb{R}$. Man nennt diese Klasse der Parameter *affine Parametrisierungen*. Machen Sie sich klar, dass sowohl für raumartige als auch zeitartige Geodätische die Bogenlänge ein affiner Parameter ist und dass deshalb *jeder* affine Parameter die Form $\lambda = as + b$ hat, wobei s die Bogenlänge ist. Für lichtartige geodätische gibt es zwar den Begriff des affinen Parameters, nicht aber den Begriff der Bogenlänge.

Aufgabe 2

Wir betrachten Raumzeiten (M, g) mit *statischen* Metriken g. Diese können durch geeignete Wahl der Koordinaten stets in eine Form gebrachten werden, in der alle metrischen Koeffizienten $g_{\alpha\beta}$ 1.) von der Zeitkoordinate t unabhängig sind und 2.) die drei gemischten Komponenten g_{0b} verschwinden. Metriken für die nur ersteres zutrifft heißen *stationär*. Die statischen Metriken bilden also eine echte Untermenge der stationären Metriken.

Im statischen Fall können wir also schreiben:

$$g = g_{\alpha\beta}(t, \vec{x})\, dx^\alpha \otimes dx^\beta = \phi^2(\vec{x})\, c^2 dt \otimes dt - \bar{g}_{ab}(\vec{x})\, dx^a \otimes dx^b\,. \tag{4a}$$

Dabei haben wir den räumlichen Teil der Metrik mit einem Minuszeichen versehen, so dass $\bar{g}_{ab}(\vec{x})\, dx^a \otimes dx^b$ eine *positive*-definite Metrik auf den 3-Mannigfaltigkeiten konstanter Zeit t ist. Wir nennen $ct = x^0$.

Eine alternative Weise die Metrik g zu schreiben ist

$$g = \phi^2(\vec{x}) \left(c^2 dt \otimes dt - \hat{g}_{ab}(\vec{x})\, dx^a \otimes dx^b \right), \tag{4b}$$

wobei

$$\bar{g} = \phi^2 \hat{g}\,. \tag{5}$$

Die zweite Form (4b) wird erst in der folgenden Aufgabe wichtig.

Zeigen Sie, dass die Christoffel-Symbole der Metrik (4a) wie folgt sind: Alle Christoffel Symbole mit allen drei oder genau einem Index gleich 0 verschinden, d.h. $\Gamma^0_{00} = \Gamma^0_{ab} = \Gamma^a_{0b} = \Gamma^a_{b0} = 0$. Die anderen Komponenten sind

$$\Gamma^a_{00} = \bar{g}^{ab} \phi \phi_{,b}\,, \qquad \Gamma^0_{a0} = \Gamma^0_{0a} = [\ln(\phi)]_{,a}\,, \qquad \Gamma^a_{bc} = \bar{\Gamma}^a_{bc}\,. \tag{6}$$

Dabei sind $\bar{\Gamma}^a_{bc}$ die mit der Metrik $\bar{g}$ gebildeten Christoffel Symbole und $[\cdots]_{,a} = \partial[\cdots]/\partial x^a$.

Zeigen Sie weiter, dass die Komponenten des Ricci-Tensors der Metrik g folgende Form haben:

$$R_{00} = \phi\, \bar{\Delta}\phi\,, \tag{7a}$$

$$R_{0a} = 0\,, \tag{7b}$$

$$R_{ab} = \bar{R}_{ab} - \frac{\bar{\nabla}_a \bar{\nabla}_b \phi}{\phi}\,. \tag{7c}$$

Hier ist $\bar{\nabla}$ die Levi-Civita kovariante Ableitung bezüglich der Metrik $\bar{g}$ und $\bar{\Delta} := \bar{g}^{ab} \bar{\nabla}_a \bar{\nabla}_b$ deren Laplace-Operator.

Beweisen Sie nun den Satz, dass die einzige statische, überall reguläre und asymptotisch Minkowski'sche Lösung der Einstein'schen Vakuumfeldgleichungen ($T_{\mu\nu} = 0$, $\Lambda = 0$) in 4 Dimensionen der Minkowskiraum ist. Diesen Umstand drückt man auch so aus: Die Einstein'sche Theorie besitzt keine nicht-trivialen *Soliton-Lösungen*. (Statische Lösungen endlicher Energie könnte man sich etwa als gravitativ gebundene Zustände von "Gravitonen" vorstellen.)

Gehen Sie zum Beweis wie folgt vor: Aus (7a) folgt $\Delta\phi = 0$. Asymptotisch Minkowski'sch bedeutet, dass $\phi \to 1$ um räumlich unendlichen. Daraus können Sie folgern, dass $\phi \equiv 1$ wenn ϕ (wegen Regularität) beschränkt ist. Aus (7c) folgt nun $\bar{R}_{ab} = 0$. In 3 Dimensionen gilt aber der Satz (den Sie an dieser Stelle unbewiesen einfach hinnehmen müssen), dass aus dem Verschwinden des Ricci-Tensors das Verschwinden des Riemann-Tensors folgt. Also ....

Aufgabe 3

Wir untersuchen die Geodätischen einer statischen Metrik. Wir nehmen dazu statt (4a) die Form (4b). Stellen Sie dazu die Euler-Lagrange Gleichungen des Energiefunktionals für die Funktionen $t(\lambda)$ und $x^a(\lambda)$ auf. Zeigen Sie aus Ersterer, dass $\dot{t}\phi^2 = K = \mathrm{konst}$. Die Euler-Lagrange Gleichung für $x^a(\lambda)$ können Sie zweifach vereinfachen. Einmal, indem Sie das Ergebnis aus Aufgabe 1 benutzen, gemäß dem $\phi^2\big(c^2\dot{t}^2 - \hat{g}_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b\big) = \kappa = \mathrm{konst}$. Dann ein zweites Mal, indem Sie t statt λ als Parameter verwenden. Dazu nehmen wir an, dass $\dot{t} \neq 0$, also die Konstante K nicht verschwindet. Beweisen Sie so, dass die Euler-Lagrange-Gleichung für $x^a(\lambda)$ in folgende Form gebracht werden kann (ein Strich bezeichnet eine Ableitung nach t):

$$x''^a + \hat{\Gamma}^a_{bc}\, x'^a x'^b = -\, C\, \hat{g}^{ab}\, (\phi^2)_{,b}\,. \tag{8}$$

Hier ist $C := \kappa c^2/2K^2$ und alle Feldgrößen ($\hat{\Gamma}$, ϕ, $\hat{g}$) werden wie üblich bei bei $x(t)$ ausgewertet.

Damit ist insbesondere folgender Satz bewiesen: Lichtartige Geodätische ($\kappa = 0$) in statischen Raumzeiten sind so, dass Ihre Projektionen in die 3-dimensionalen räumlichen Hyperflächen $t = \mathrm{konst}$. Geodätische bezüglich der Metrik $\hat{g}$ sind, wobei t affiner Parameter ist. Man nennt deshalb $\hat{g}$ auch die *optische Metrik* des Raumes. (Achtung: Im Allgemeinen gibt es in einer Raumzeit keine kanonisch definierte Familie von Hyperflächen, die man mit "dem Raum" identifizieren könnte und daher auch keinen natürlichen Begriff von "räumlicher Projektion". In statischen Raumzeiten sind diese Begriffsbildungen aber möglich.)