

Übungen zur Vorlesung
Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie
 von DOMENICO GIULINI

Blatt 7

Zur Wiederholung (s. Vorlesung)

In der Vorlesung wurde die Lichtausbreitung in der statischen Metrik

$$g = \left(1 + \frac{2\phi(\vec{x})}{c^2}\right) c^2 dt \otimes dt - \left(1 - \frac{2\phi(\vec{x})}{c^2}\right) d\vec{x} \otimes d\vec{x} \quad (1)$$

diskutiert unter Benutzung des Ergebnisses von Aufgabe 3 auf Blatt 5, gemäß dem die räumliche Projektion lichtartiger Geodätischer selbst geodätische in der „optischen Metrik“ $\hat{g}_{ab} := -g_{ab}/g_{00}$ sind. Für (1) ist diese in führender (linearer) Ordnung in ϕ/c^2 gegeben durch

$$\hat{g}_{ab}(\vec{x}) = \left(1 - \frac{4\phi(\vec{x})}{c^2}\right) \delta_{ab}. \quad (2)$$

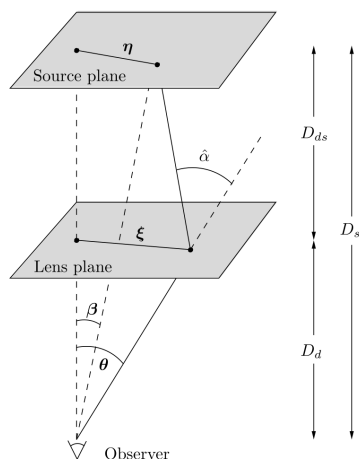
Die in dieser optischen Metrik gemessene „optische Weglänge“ $d\hat{s}$ unterscheidet sich von der in den Koordinaten (x^1, x^2, x^3) gemessenen euklidischen Weglänge $ds = \sqrt{\delta_{ab} dx^a dx^b}$ durch den Faktor $n(\vec{x}) = 1 - 2\phi(\vec{x})/c^2$. Man kann daher bezüglich der euklidischen Hilfsgeometrie des Raumes so rechnen, als sei man in flachen Raum, der allerdings erfüllt ist von einem optisch aktiven Medium mit variablem Brechungsindex $n(\vec{x})$. In der Vorlesung wurde so mit Hilfe der Geodätengleichung in der optischen Metrik (Eikonalgleichung) gezeigt, dass die Differenzvektoren $\vec{\alpha} := \vec{e}_f - \vec{e}_i$ zwischen dem Einheitsvektor der auslaufenden Strahlrichtung \vec{e}_f und der einlaufenden Strahlrichtung \vec{e}_i in führender Ordnung (in ϕ/c^2) gegeben ist durch

$$\vec{\alpha}(\vec{\xi}) = -\frac{4G}{c^2} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\xi' \Sigma(\vec{\xi}') \frac{\vec{\xi} - \vec{\xi}'}{\|\vec{\xi} - \vec{\xi}'\|^2}, \quad (3a)$$

wobei $\vec{\xi} = (x, y)$, mit

$$\Sigma(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} dz \rho(x, y, z). \quad (3b)$$

Aufgabe 1



In der euklidischen Geometrie gelten die in der Abbildung gezeigten geometrische Verhältnisse zwischen der Linsenebene (Lens plane), die durch $\vec{\xi}$ parametrisiert wird, und Quellenebene (Source plane), die durch $\vec{\eta}$ parametrisiert wird. θ und β bezeichnen die Winkel, unter denen die Quelle mit bzw. ohne Linse gesehen wird. Mit D_d und D_s sind die Abstände des Beobachters von der Linsen- bzw. Quellenebene bezeichnet, wobei $D_{ds} := D_s - D_d$. Im Bild ist $\hat{\alpha} := \|\vec{\alpha}\|$, was als Funktion von $\vec{\xi}$ zu betrachten ist.

Unter einer Linsengleichung versteht man eine Abbildung, die jedem Punkt der Linsenebene einen Punkt der Quellenebene zuordnet, mit den obigen Bezeichnungen also $\vec{\eta}$ als Funktion von ξ darstellt. Zeigen Sie

$$\vec{\eta} = \frac{D_s}{D_d} \vec{\xi} + D_{ds} \vec{\alpha}(\vec{\xi}). \quad (4)$$

Schreiben Sie diese Gleichung in dimensionsloser Form indem Sie einen Längensparameter ξ_0 in der Linsenebene und einen Entsprechenden Längensparameter $\eta_0 := (D_s/D_d)\xi_0$ in der Quellenebene einführen und statt $(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ die Variablen $\vec{x} := \vec{\xi}/\xi_0$ und $\vec{y} := \vec{\eta}/\eta_0$ verwenden. Zeigen Sie, dass dann (4) äquivalent ist zu

$$\vec{y}(\vec{x}) := \vec{\nabla} \varphi(\vec{x}), \quad (5a)$$

wobei

$$\varphi(\vec{x}) := \frac{1}{2} \|\vec{x}\|^2 - \psi(\vec{x}), \quad (5b)$$

$$\psi(\vec{x}) := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \ln(\|\vec{x} - \vec{x}'\|) \kappa(\vec{x}') d^2x', \quad (5c)$$

$$\kappa(\vec{x}) := \frac{4\pi G}{c^2} \frac{D_d D_{ds}}{D_s} \Sigma(\xi_0 \vec{x}). \quad (5d)$$

In diesen Gleichungen beziehen sich alle Vektorpfeile auf den \mathbb{R}^2

Zeigen Sie, dass die Spur der Hesse-Matrix $D^2\psi$ am Punkt \vec{x} durch $2\kappa(\vec{x})$ gegeben ist, insbesondere also außerhalb des Trägers von κ verschwindet. Was bedeutet das für die Geometrie der Linsenabbildung?

Aufgabe 2

Spezialisieren Sie die Linsenabbildung von Aufgabe 1 auf $\Sigma(\vec{\xi}) = m \delta^{(2)}(\vec{\xi})$. Wählen Sie

$$\xi_0 = \sqrt{2 \cdot \frac{2GM}{c^2} \cdot \frac{D_d D_{ds}}{D_s}}. \quad (6)$$

Zeigen Sie, dass damit

$$\vec{y}(\vec{x}) = \vec{x} \left(1 - \|\vec{x}\|^{-2}\right). \quad (7)$$

Diskutieren Sie die Urbilder \vec{x} eines festen Quellpunktes \vec{y} , insbesondere $\vec{y} = \vec{0}$. Interpretieren Sie diese Abbildung geometrisch. Tipp: Siehe Bild. Es handelt sich um eine Aufnahme des Hubble-Space-Teleskops von 21. Dez. 2011. Die als Linse wirkende Massenverteilung heißt LRG 3-757. Mehr darüber müssen Sie selbst herausfinden.

