Übungen zur Vorlesung

Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie

von Domenico Giulini

Blatt 8

Wiederholung

In der Vorlesungen wurden die linearisierten Einstein-Gleichungen in der de Donder-Eichung besprochen. Letztere lautet

$$\partial^\alpha\big(h_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}h\big) = 0\,, \tag{1}$$

wobei $h := \eta^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}$. Hier bezeichnet η die Minkoswski-Metrik und die Komponenten beziehen sich auf ein Koordinatensystem, in dem gilt $\{\eta_{\alpha\beta}\} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$. Ferner ist $h_{\alpha\beta} := g_{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta}$, wo g die Metrik der Raum-Zeit ist . Zur Ableitung der in $h_{\alpha\beta}$ linearisierten Einstein-Gleichungen mussten wir voraussetzen, dass Terme, die in $h_{\alpha\beta}$ und deren ersten Ableitungen quadratisch sind, vernachlässigt werden können. Außerdem ist die Quelle $T_{\alpha\beta}$ von der Ordnung $h_{\alpha\beta}$. Ist die De Donder'sche Bedingung (1) erfüllt, dann nimmt die linearisierte Einstein-Gleichung die Form an

$$\Box h_{\alpha\beta} = -2\kappa\big(T_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}T\big) \tag{2}$$

mit $T := \eta^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta}$. (In der linearisierten Theorie werden Indizes immer mit der Minkowski-Metrik verschoben).

Die De Donder'sche Eichbedingung fixiert die Eichung nicht vollständig. Eichtransformationen haben ja die Form

$$h_{\alpha\beta} \mapsto h'_{\alpha\beta} := h_{\alpha\beta} + \partial_\alpha\Lambda_\beta + \partial_\beta\Lambda_\alpha\,. \tag{3}$$

Also gilt (nachrechnen!)

$$\partial^\alpha\big(h'_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}h'\big) = \partial^\alpha\big(h_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}h\big) + \Box\Lambda_\beta\,. \tag{4}$$

Ist also (1) für $h_{\alpha\beta}$ bereits erfüllt, dann erfüllt auch $h'_{\alpha\beta}$ (1) wenn $\Box\Lambda_\beta = 0$. Nach Stellen der De Donder'schen bedingung besteht also eine "residuelle" Eichfreiheit (7) mit solchen Λ_α, die $\Box\Lambda_\alpha = 0$ erfüllen.

Aufgabe 1

Argumentieren Sie, dass (1) für $h'_{\alpha\beta}$ immer erfüllt werden kann, indem Sie die entsprechende Lösung für Λ in (4) durch die retardierte Green-Funktion des Wellenoperators explizit angeben. Überzeugen Sie sich davon, dass diese Lösung $\Lambda_\alpha(x)$ als ein Integral über den Rückwärtslichtkegel an x darstellt. Was ist das dazu benutzte Integrationsmaß?

Aufgabe 2

Zeigen Sie folgenden Satz: Ist $T_{\alpha\beta} = 0$ so kann man zusätzlich zu (1) noch folgende Eichbedingungen stellen, die zusammen mit (1) dann vollständig ist (es besteht keine weitere Eichfreiheit mehr):

$$\eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} = 0\,, \tag{5a}$$
$$v^{\alpha} h_{\alpha\beta} = 0\,. \tag{5b}$$

Dabei ist v ein beliebiger zeitartiger Vektor (unabhängig vom Punkt der Raum-Zeit).

Anleitung: Betrachten Sie die Fourier-Transformierte von $h_{\alpha\beta}$

$$h_{\alpha\beta}(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4k \, \exp(ik \cdot x) \, \tilde{h}_{\alpha\beta}(k)\,, \tag{6a}$$
$$\tilde{h}_{\alpha\beta}(k) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4x \, \exp(-ik \cdot x) \, h_{\alpha\beta}(x)\,, \tag{6b}$$

und entsprechend für Λ. Hier ist $k \cdot x := k_\beta x^\beta = \eta_{\alpha\beta} k^\alpha x^\beta$. Es gilt $\tilde{h}_{\alpha\beta}(-k) = \left[\tilde{h}_{\alpha\beta}(k)\right]^*$ und $\tilde{\Lambda}(-k) = \left[\tilde{\Lambda}(k)\right]^*$ (ein $*$ bezeichnet komplexe Konjugation), da $h_{\alpha\beta}$ und Λ_α reellwertig sind.

Nun ist (7) äquivalent zu

$$\tilde{h}_{\alpha\beta}(k) \mapsto \tilde{h}'_{\alpha\beta}(k) := \tilde{h}_{\alpha\beta}(k) + ik_\alpha \tilde{\Lambda}_\beta(k) + ik_\beta \tilde{\Lambda}_\alpha(k)\,. \tag{7}$$

Gilt $\Box h_{\alpha\beta} = 0$, dann hat $\tilde{h}_{\alpha\beta}$ seinen Träger auf dem Lichtkegel. Das gilt auch für Λ_α.

Zeigen Sie, dass für $h'_{\alpha\beta}$ die zu (5) äquivalenten Bedingungen

$$\eta^{\alpha\beta} \tilde{h}'_{\alpha\beta} = 0\,, \tag{8a}$$
$$v^{\alpha} \tilde{h}'_{\alpha\beta} = 0\,, \tag{8b}$$

durch Wahl von $\tilde{\Lambda}_\alpha$ immer erfüllt werden können, wobei $h_{\alpha\beta}$ bereits (1) erfüllt:

$$k^\alpha \tilde{h}_{\alpha\beta}(k) = \tfrac{1}{2} k_\beta \tilde{h}\,. \tag{9}$$

Beachten Sie: Mit (7) ist (8) ein (scheinbar überbestimmtes) linear-inhomogenes System von 10 Gleichungen für die vier $\tilde{\Lambda}_\alpha(k)$ dar. Dabei stellt (9) Einschränkungen an die Inhomogenität dar. Zeigen Sie zuerst, dass (9) und (8b) die Bedingung (8a) implizieren. Multiplizieren Sie dann (8b) mit v^β und benutzen Sie die so entstehende Beziehung, um (8b) eindeutig nach $\tilde{\Lambda}_\beta(k)$ aufzulösen. Es ergibt sich ($v \cdot k = v_\alpha k^\alpha$, $\tilde{h}(v, v) = \tilde{h}_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta$)

$$\tilde{\Lambda}_\beta(k) = \frac{i}{(v \cdot k)} \left(v^\alpha \tilde{h}_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}\, k_\beta \, \frac{\tilde{h}(v,v)}{v \cdot k} \right)\,. \tag{10}$$

Damit sind die $\tilde{\Lambda}_\beta$ eindeutig durch die $\tilde{h}_{\alpha\beta}$ und die Wahl von v bestimmt. Warum muss v zeitartig sein?

Aufgabe 3

In einer Raum-Zeit (M, g) betrachten wir eine einparametrige (σ) Schar $x(s, \sigma)$ zeitartiger Geodätischer, so dass für jeden Wert $\sigma \in (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R}$ mit $\epsilon > 0$ gilt:

$$\ddot{x}^\alpha(s, \sigma) + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\big(x(s, \sigma)\big)\, \dot{x}^\beta(s, \sigma)\dot{x}^\gamma(s, \sigma) = 0\,. \tag{11}$$

Dabei bezeichnet hier und im Folgenden ein Punkt die Ableitung nach dem Kurvenparameter s (hier bei festgehaltenem σ). Wir wählen s als identisch zur Bogenlänge, so dass $g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = 1$.

Entlang der Geodätischen zu $\sigma = 0$ definieren wir das Vektorfeld $n(s)$ mit den Komponenten

$$n^\alpha(s) := \frac{\partial x^\alpha(s, \sigma)}{\partial \sigma}\bigg|_{\sigma=0}. \tag{12}$$

Allgemein definieren wir die kovariante Ableitung eines Vektorfeldes $v(s)$ entlang einer Kurve $x(s)$ durch

$$\nabla_s v^\alpha := \dot{v}^\alpha(s) + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\big(x(s)\big)\, \dot{x}^\mu(s) v^\nu(s)\,, \tag{13}$$

Zeigen Sie, dass das in (12) definierte Vektorfeld entlang der Geodätischen $\sigma = 0$ der der Gleichung genügt

$$\nabla_s^2 n^\alpha(s) = -R^\alpha{}_{\mu\beta\nu}\big(x(s)\big)\, \dot{x}^\mu(s)\dot{x}^\nu(s)\, n^\beta(s)\,. \tag{14}$$

wobei $R^\alpha{}_{\mu\beta\nu}$ die Komponenten des Riemann'schen Krümmungstensors sind. Man nennt (14) die die *Gleichung der geodätischen Deviation* oder auch *Jacobi-Gleichung*.

Anleitung: Differenzieren Sie (11) nach σ. Ersetzen Sie darin den Term $\ddot{n}^\alpha$ durch die Terme, die Sie aus der Berechnung von $\nabla^2 n^\alpha := \nabla_s(\nabla_s n^\alpha)$ durch zweimaliges Anwenden von (13) erhalten. Darin wird auch ein Term $\ddot{x}^\alpha$ vorkommen, den Sie gemäß (11) ersetzen können. Erinnern Sie sich an die Definition des Krümmungstensors:
$R = \partial\Gamma - \partial\Gamma + \Gamma\,\Gamma - \Gamma\,\Gamma$.

Zeigen Sie zum Schluss, dass falls n die Gleichung (14) erfüllt, das auch für die Projektion $n_\perp := n - \dot{x}\, g(\dot{x}, n)$ von n senkrecht zu $\dot{x}$ gilt. Das geht ohne jede weitere Rechnung, wenn Sie folgendes bedenken: 1) $\nabla_s \dot{x}^\alpha = 0$, 2) $\nabla_s g_{\alpha\beta} = 0$ und 3) der Krümmungstensor ist in den letzten zwei Indizes antisymmetrisch. Formulieren Sie das darauf basierende Argument vollständig.