

Übungen zur Vorlesung
Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie
von DOMENICO GIULINI

Blatt 9

Aufgabe 1

In der TT-Eichung ist die Metrik der (+) – Mode einer ebenen Gravitationswelle in z-Richtung gemäß Vorlesung gegeben durch

$$g = c^2 dt^2 - [1 - h_+(t - z/c)] dx^2 - [1 + h_+(t - z/c)] dy^2 - dz^2. \quad (1)$$

Berechnen Sie alle Komponenten $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ des Krümmungstensors in linearer Ordnung in der Amplitude h_+ .

Hinweis: Die $\Gamma \Gamma$ - Terme sind von quadratischer Ordnung, können also weggelassen werden. Dann ist in linearer Ordnung (s. Vorlesung)

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\frac{1}{2}(\partial_{\alpha\gamma}^2 h_{\beta\delta} + \partial_{\beta\delta}^2 h_{\alpha\gamma} - \partial_{\alpha\delta}^2 h_{\beta\gamma} - \partial_{\beta\gamma}^2 h_{\alpha\delta}). \quad (2)$$

Aufgabe 2

Berechnen Sie die mittlere Energiestromdichte einer harmonischen ebenen Gravitationswelle der (+) – Mode; d.h. $h_+(t-z/c) = A \cos[\omega(t-z/c)]$, mit $\omega = 2\pi\nu$, wobei ν die Frequenz ist. Welche typischen Werte erhält man für Amplituden $A = 10^{-21}$ und Frequenzen von 100 Hz?

Hinweis: Benutzen Sie dazu den in der Vorlesung angegebenen Ausdruck des gemittelten Energie-Impulstensor des linearisierten Gravitationsfeldes in TT-Eichung.

Aufgabe 3

Stellen Sie die Gleichungen für eine lichtartige Geodätische in der Metrik (1) auf und zeigen Sie damit, dass ein anfänglich in x-Richtung orientierter Lichtstrahl keine Ablenkung in y-Richtung erfährt, und dass seine Ablenkung in z-Richtung proportional zur Amplitude h_+ ist. Damit können Sie unter konsequenter Weglassung quadratischer Terme in der Amplitude die Bedingung der Lichtartigkeit in der Form schreiben

$$cdt = \pm dx(1 - \frac{1}{2}h_+(t(x))), \quad (3)$$

wobei das obere/untere Vorzeichen für Lichtstrahlen gilt, die in positiver/negativer x-Richtung fortschreiten.

Aufgabe 4

Wenden Sie das Ergebnis (3) der vorherigen Aufgabe nun auf folgende Situation an: Auf der x -Achse ($y = z = 0$) befinden sich bei $x = 0$ eine monochromatische Lichtquelle und bei $x = L$ ein Spiegel. Sowohl Lichtquelle als auch Spiegel seien kräftefrei, im Feld der Gravitationswelle also bei konstanten x -Werten (das ist eine spezielle Eigenschaft der TT-Eichung; vgl. Vorlesung). Man betrachte ein zum Zeitpunkt $t = t_a$ entlang der x -Richtung von der Quelle ausgesandtes Lichtsignal der Frequenz ν_a . Dieses wird zu einem Zeitpunkt t_r am Spiegel reflektiert und trifft zum Zeitpunkt $t = t_e$ mit der Frequenz ν_e wieder bei der Quelle ein. Zeigen Sie, dass

$$\nu_e = \nu_a \left[1 + \frac{1}{2} \left(h_+ \left(t_a + \frac{2L}{c} \right) - h_+ (t_a) \right) \right]. \quad (4)$$

Anleitung: Integrieren Sie (3) einmal von $x = 0$ bis $x = L$ entlang der ungestörten Bahn $t(x) = t_a + (x/c)$ und einmal von $x = L$ nach $x = 0$ zurück entlang der ungestörten Bahn $t(x) = (2L - x)/c$. Durch Addition erhalten Sie t_e als Funktion von t_a . Berechnen Sie dt_e/dt_a und argumentieren Sie, dass dies gleich dem Verhältnis ν_a/ν_e ist. [Sie dürfen entlang der ungestörten Bahn integrieren, da die Störung in z -Richtung bei Berücksichtigung zu quadratischen Termen in h_+ führen würde, die wir aber konsequent vernachlässigen.]