Übungen zur Vorlesung

Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie

von DOMENICO GIULINI

Blatt 10

Aufgabe 1

In der TT-Eichung ist die Metrik der $(+)$ – Mode einer ebenen Gravitationswelle in z-Richtung gemäß Vorlesung gegeben durch

$$g = c^2\, dt^2 - \big[1 - h_+(t - z/c)\big]\, dx^2 - \big[1 + h_+(t - z/c)\big]\, dy^2 - dz^2\,. \tag{1}$$

Berechnen Sie alle Komponenten $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ des Krümmungstensors in linearer Ordnung in der Amplitude h_+.

Hinweis: Die $\Gamma\,\Gamma$ - Terme sind von quandratischer Ordnung, können also weggelassen werden. Dann ist in linearer Ordnung (s. Vorlesung)

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\tfrac{1}{2}\big(\partial^2_{\alpha\gamma} h_{\beta\delta} + \partial^2_{\beta\delta} h_{\alpha\gamma} - \partial^2_{\alpha\delta} h_{\beta\gamma} - \partial^2_{\beta\gamma} h_{\alpha\delta}\big)\,. \tag{2}$$

Aufgabe 2

Berechnen Sie die mittlere Energiestromdichte einer harmonischen ebenen Gravitationswelle der $(+)$ – Mode; d.h. $h_+(t-z/c) = A\,\cos\big[\omega(t-z/c)\big]$, mit $\omega = 2\pi\nu$, wobei ν die Frequenz ist. Welche typischen Werte erhält man für Amplituden $A = 10^{-21}$ und Frequenzen von $100\,\mathrm{Hz}$?

Hinweis: Benutzen Sie dazu den in der Vorlesung angegebenen Ausdruck des gemittelten Energie-Impulstensor des linearisierten Gravitationsfeldes in TT-Eichung.

Aufgabe 3

Stellen Sie die Gleichungen für eine lichtartige Geodätische in der Metrik (1) auf und zeigen Sie damit, dass ein anfänglich in x-Richtung orientierter Lichtstrahl keine Ablenkung in y-Richtung erfährt, und dass seine Ablenkung in z-Richtung proportional zur Amplitude h_+ ist. Damit können Sie unter konsequenter Weglassung quadratischer Terme in der Amplitude die Bedingung der Lichtartigkeit in der Form schreiben

$$c\,dt = \pm dx\big(1 - \tfrac{1}{2} h_+(t(x))\big)\,, \tag{3}$$

wobei das obere/untere Vorzeichen für Lichtstrahlen gilt, die in positiver/negativer x-Richtung fortschreiten.

Aufgabe 4

Wenden Sie das Ergebnis (3) der vorherigen Aufgabe nun auf folgende Situation an: Auf der x-Achse ($y = z = 0$) befinden sich bei $x = 0$ eine monochromatische Lichtquelle und bei $x = L$ ein Spiegel. Sowohl Lichtquelle als auch Spiegel seinen kräftefrei, im Feld der Gravitationswelle also bei konstanten x-Werten (das ist eine spezielle Eigenschaft der TT-Eichung; vgl. Vorlesung). Man betrachte ein zum Zeitpunkt $t = t_a$ entlang der x-Richtung von der Quelle ausgesandtes Lichtsignal der Frequenz ν_a. Dieses wird zu einem Zeitpunkt t_r am Spiegel reflektiert und trifft zum Zeitpunkt $t = t_e$ mit der Frequenz $\nu_e$wieder bei der Quelle ein. Zeigen Sie, dass

$$\nu_e = \nu_a \left[1 + \frac{1}{2}\Big(h_+\big(t_a + \tfrac{2L}{c}\big) - h_+\big(t_a\big)\Big)\right] . \tag{4}$$

Anleitung: Integrieren Sie (3) einmal von $x = 0$ bis $x = L$ entlang der ungestörten Bahn $t(x) = t_a + (x/c)$ und einmal von $x = L$ nach $x = 0$ zurück entlang der ungestörten Bahn $t(x) = (2L - x)/c$. Durch Addition erhalten Sie t_e als Funktion von t_a. Berechnen Sie dt_e/dt_a und argumentieren Sie, dass dies gleich dem Verhältnis ν_a/ν_e ist. [Sie dürfen entlang der ungestörten Bahn integrieren, da die Störung in z-Richtung bei Berücksichtigung zu quadratischen Termen in h_+ führen würde, die wir aber konsequent vernachlässigen.]

Aufgabe 4

Bisher wurde in der Vorlesung einfach angenommen, dass Lichtstrahlen im Limes der geometrischen Optik Nullgeodäten der Raumzeit sind. In dieser Aufgabe wollen wir uns vergewissern, dass diese Aussage tatsächlich eine Folge der Maxwell-Gleichungen ist.

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass durch Einführung eines Potentials

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \,, \tag{5}$$

die homogenen Maxwell-Gleichungen gelöst werden und die inhomogenen Gleichungen im Vakuum (verschwindende Viererstromdichte) gegeben sind durch

$$\nabla^\mu F_{\mu\nu} := g^{\mu\lambda}\nabla_\lambda F_{\mu\nu} = 0 \,. \tag{6}$$

Zeigen Sie, dass diese in der kovarianten Lorenz-Eichung

$$\nabla^\mu A_\mu = 0 \tag{7}$$

übergehen in ($\Box := g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$)

$$\Box A_\mu - R_\mu^\nu A_\nu = 0 \,. \tag{8}$$

Um aus den quellenfreien Maxwellgleichungen (Wellenoptik) die Gesetze der geometrischen Optik abzuleiten, betrachtet man Lösungen der Maxwellgleichungen (8) in der Eichung (7) für Vektorpotentiale der Form

$$A_\mu = \big(a_\mu + \epsilon b_\mu + O(2)\big)\, \exp(i\psi/\epsilon) \,. \tag{9}$$

Dabei ist die Amplitude in einer Potenzreihe in ϵ entwickelt, d.h. a_μ, b_μ sind Vektorfelder und $O(2)$ bezeichnen Terme von mindestens quadratischer Ordnung in ϵ, und ψ ist eine relle Phasenfunktion (sog. Eikonal). Wir führen folgende Größen ein:

$$k_\mu := \nabla_\mu \psi \qquad \text{Wellenzahlvektor}\,, \tag{10a}$$
$$a := \sqrt{g^{\mu\nu} a_\mu a_\nu} \qquad \text{Amplitude}\,, \tag{10b}$$
$$f_\mu := a_\mu / a \qquad \text{Polarisationsvektor}\,. \tag{10c}$$

Man setzt nun den Ansatz (9) in (7) und (8) ein und betrachtet die Konsequenzen für $\epsilon \to 0$ (Limes der geometrischen Optik). Dazu ordnet man nach steigenden Potenzen von ϵ, beginnend mit ϵ^{-2}, und setzt deren Koeffizienten einzeln gleich Null. Zeigen Sie: Für (7) ergibt dies

$$\epsilon^{-2}: \quad \text{keine Bedingung}\,, \tag{11a}$$
$$\epsilon^{-1}: \quad k^\mu a_\mu = 0\,, \tag{11b}$$

und für (8)

$$\epsilon^{-2}: \quad k^\mu k_\mu = 0\,, \tag{12a}$$
$$\epsilon^{-1}: \quad k^\nu \nabla_\nu a_\mu = -\tfrac{1}{2}(\nabla^\nu k_\nu) a_\mu\,, \tag{12b}$$

wobei in (12b) bereits einmal Gleichung (12a) verwendet wurde.

Bilden Sie ∇_ν von $k^\mu k_\mu = 0$ und zeigen Sie mit Hilfe der Tatsache, dass k_μ Gradientenfeld ist (10a), dass

$$k^\nu \nabla_\nu k_\mu = 0\,. \tag{13}$$

Leiten Sie nun mit Hilfe von (12b) ab, dass

$$k^\nu \nabla_\nu a = -\tfrac{1}{2}\, a\, \nabla^\nu k_\nu\,. \tag{14}$$

Aus letzter Gleichung können Sie die Änderung der Aplitude entlang des Lichstrahls berechnen. Betrachten Sie nun f_μ aus (10c) und folgern Sie mit (12b) und (14), dass

$$k^\nu \nabla_\nu f_\mu = 0\,. \tag{15}$$

Insgesamt habe Sie damit in der betrachteten Näherung (Vernachlässigung von Termen ϵ^n für $n \geq 0$) folgende Konsequenzen aus den Maxwellgleichungen abgeleitet: Die Lichtstrahlen sind Nullgeodäten (Gl. 12a und 13) entlang denen der Polarisationsvektor senkrecht steht (Gl. 11b) und parallel verschoben wird (Gl. 15). Die Amplitude verändert sich gemäß (14), nimmt also ab/zu falls die Divergenz des lichtartigen Vektorfeldes k positiv/negativ ist.