Übungen zur Vorlesung

Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie

von DOMENICO GIULINI

Blatt 11

Aufgabe 1

Ein homogener Stab der Masse M, Länge L und von quadratischem Querschnitt $q = a^2$ der Seitenlänge a rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um eine Achse durch den Mittelpunkt und senkrecht zur Symmetrieachse. In der Vorlesung wurde folgende Formel für für die GW-Luminosität abgeleitet (unter der Voraussetzung $a \ll L$, so dass das Hauptträgheitsmoment um die Symmetrieachse gegenüber den anderen vernachlässigbar ist)

$$L_{GW}^{(Stab)} = \frac{2}{45} \cdot \frac{G}{c^5} \cdot \omega^6 \cdot M^2 \cdot L^4 \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass die aufgrund der Drehung auftretende Zugspannung (Kraft pro Fläche) in der Mitte des Stabes gegeben ist durch

$$\sigma = \tfrac{1}{2}\rho v^2 . \tag{2}$$

Dabei ist $\rho = M/(qL)$ die Massensichte im Innern des Stabes und $v = \omega L/2$ die Geschwindigkeit der Stabenden.

Zeigen Sie weiter: Ist der Stab aus einem Material, dessen Zerreißspannung durch σ_{max} gegeben ist, so ist $L_{GW}^{(Stab)}$ nach oben beschränkt durch

$$L_{(max)} = \frac{1024}{45} \cdot \frac{G}{c^5} \cdot \frac{q^2 \cdot \sigma_{max}^3}{\rho} . \tag{3}$$

Typische Werte sind

$\star$	ρ	σ_{max}
Stahl	$7,85\ \mathrm{g/cm^3}$	$2100\ \mathrm{N/mm^2}$
Glasfaser	$2,5\ \mathrm{g/cm^3}$	$4800\ \mathrm{N/mm^2}$

Berechnen Sie jeweils L_{GW}^{max} und die zugehörige maximale Geschwindigkeit v_{max} der Stabenden. Beachten Sie: Beide sind bei vorgegebenem Stabmaterial von der Länge L des Stabes unabhängig.

Aufgabe 2

Wir betrachten wieder den rotierenden Stab aus Aufgabe 2, interessieren uns aber nun für die Amplitude der Gravitationswelle. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Amplitude der zirkular polarisierten Welle, die parallel zur Rotationsachse abgestrahlt wird, gegeben ist durch

$$A(r) = \frac{4G\omega^2}{c^4} \cdot \frac{1}{r} \cdot I_3' \tag{4}$$

wobei für den Stab $I_3' = \frac{1}{12}ML^2$. Zeigen Sie nun, dass diese nach oben beschränkt ist durch

$$A_{max}(r) = \frac{L}{r} \cdot \underbrace{\frac{8}{3}\frac{Gq\sigma_{max}}{c^4}}_{A_*} . \tag{5}$$

Beachten Sie: Im Gegensatz zu (3) hängt dieser Ausdruck nicht von ρ ab!

Berechnen Sie A_* für Stahl und Glasfaser und ziehen Sie Schlüsse hinsichtlich der Möglichkeit, detektierbare Gravitationswellen im Labor zu erzeugen. Diskutieren Sie Ideen, diese Lage zu verbessern!

Aufgabe 3

Wir betrachten wie in der Vorlesung ein gravitatives Binärsystem von zwei Massenpunkten gleicher Masse m, die sich im Abstand r kreisförmig um ihren gemeinsamen Schwerpunkt bewegen. In der Vorlesung wurde abgeleitet, dass dieses System die folgende Gravitationswellen-Luminosität besitzt (hier für den Spezialfall $m_1 = m_2$):

$$L_{GW} = \frac{64}{5}\frac{G^4}{c^5}\frac{m^5}{r^5} . \tag{6}$$

Berechnen Sie, wie sich aufgrund dieser Abstrahlung der räumliche Abstand r und die zeitliche Periode T des Binärsystems als Funktion der Zeit verändern. Werten Sie diese aus für ein System mit gleichen Masssen $m = 1{,}4\, m_\odot$ und Bahnperiode $T = 7{,}75\, h$. Diese Werte entsprechen etwa den Parametern des Hulse-Taylor-Pulsars PSR 1913+16.[1]

Tipp: Nach dem Virialsatz gilt für gebundene Lösungen im $1/r$-Potential, dass die zeitlichen Mittel von kinetischer und potentieller Energie so zusammenhängen: $2\langle E_{kin}\rangle = -\langle E_{pot}\rangle$. Im vorliegenden Fall (gleicher Abstand der Massen bei ungestörter Bahn) sind beide Energien konstant, also gilt sogar $2E_{kin} = -E_{pot}$. Also gilt auch

$$E_{tot} = E_{kin} + E_{pot} = E_{pot}/2 . \tag{7}$$

Indem Sie voraussetzen, dass die Energieabstrahlung pro Umlauf sehr klein ist gegen die gesamte potentielle Energie (adiabatische Abstrahlung) düfen Sie annehmen, dass (7) auch wärend des Abstrahlvorganges gültig bleibt (mit Ausnahme seiner letzten Phase vor dem Zusammenstoß beider Massen). Leiten Sie durch Differentiation nach t und Setzen von $-dE_{tot}/dt = L_{GW}$ eine Differentialgleichung 1. Ordnung für $r(t)$ ab,

[1] Siehe `https://en.wikipedia.org/wiki/Hulse-Taylor_binary`

die Sie leicht integrieren können. Gemäß dieser ist die Zeit, die vergeht bis $r = 0$ wird, gegeben durch

$$t = t_{\text{spiral}} := \frac{5}{64}\frac{r}{c}\left(\frac{r}{R_s}\right)^3 , \tag{8}$$

wobei $R_S = 2Gm/c^2$.

Zeigen Sie weiter, dass aus dem 3. Keplersche Gesetz folgt $\dot{T}/T = (3/2)(\dot{r}/r)$. Damit können Sie die Differentialgleichung für $r(t)$ in eine für $T(t)$ umschreiben. Zeigen Sie, dass diese äquivalent ist zu

$$\dot{T} = -\frac{3}{8}\frac{T}{t_{\text{spiral}}} . \tag{9}$$

Der Wert von $\dot{T}$ wurde für PSR 1913+16 gemessen. Vergleichen sie diesen mit dem hier errechneten.

Aufgabe 4

Betrachten Sie in Newtonscher Näherung den freien radialen Fall einer Punktmasse m auf einen Zentralkörper der Masse $M \gg m$ mit sphärisch-symmetrischer Massenverteilung und Radius R. Berechnen Sie nach der Quadrupolformel die Strahlungsleistung und zeigen Sie, dass die gesamte, während eines freien Falls von $r = \infty$ nach $r = R$ abgestrahlte Energie gegeben ist durch ($R_S := 2GM/c^2$)

$$\Delta E = mc^2 \cdot \frac{2}{105} \cdot \frac{m}{M} \cdot \left(\frac{R_S}{R}\right)^{7/2} . \tag{10}$$

(Argumentieren Sie zuerst, dass man für $M \gg m$ die Bewegung der Zentralmasse vernachlässigen kann.) Was erhält man daraus als Abschätzung für den freien Fall in ein Schwarzes Loch ($R = R_S$)?