Übungen zur Vorlesung

Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie

von Domenico Giulini

Blatt 12

Aufgabe 1

In der Vorlesung wurde die äußere Schwarzschild-Metrik als eindeutige, sphärisch-symmetrische Lösung der Einsteingleichung mit $T_{\alpha\beta} = 0$ und $\Lambda = 0$ abgeleitet. In einer orthonormierten Dualbasis, in der jede Lorentzmetrik von der Form

$$g = \theta^0 \otimes \theta^0 - \sum_{a=1}^{3} \theta^a \otimes \theta^a \tag{1}$$

ist, ist diese dann gegeben durch ($R_s = 2m = 2GM/c^2$):

$$\begin{aligned} \theta^0 &= \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{1/2} c\,dt\,, \qquad & \theta^1 &= \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1/2} dr\,, \\ \theta^2 &= r\,d\theta\,, & \theta^3 &= r\,\sin(\theta)\,d\varphi\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Ebenfalls berechnet wurden die Komponenten des kovarianten (alle Indizes unten) Krümmungstensors bezüglich der Basis (2), die sich ergaben zu

$$\frac{R_s}{r^3} = R_{0101} = -2R_{0202} = -2R_{0303} = 2R_{1212} = 2R_{1313} = -R_{2323} \tag{3}$$

Berechnen Sie den sogenannten "Kretschmann-Skalar" $K := R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu}$ und argumentieren Sie, dasss $r \to 0$ eine echte Krümmungssingularität der Mannigfaltigkeit ist, die nicht durch ungeschickte Wahl der Basis bzw. Koordinaten scheinbar erzeugt wurde.

Zeigen Sie weiter: Transformiert man die orthogonale Dualbasis $\theta^0, \theta^1, \theta^2, \theta^3$ durch eine radialen Lorentz-Boost der Rapidität $\alpha = \tanh^{-1}(v/c)$ auf eine neue orthonormiere Basis $\hat\theta^0, \hat\theta^1, \hat\theta^2, \hat\theta^3$ gemäß

$$\hat\theta^0 = \cosh(\alpha)\theta^0 + \sinh(\alpha)\theta^1\,, \hat\theta^1 = \cosh(\alpha)\theta^1 + \sinh(\alpha)\theta^0\,, \hat\theta^2 = \theta^2\,, \hat\theta^3 = \theta^3\,, \tag{4}$$

dann sind die Komponenten $\hat R_{\alpha\beta\mu\nu}$ des kovarianten Krümmungstensors der Schwarzschild-Metrik bezüglich dieser Basis gleich denen in (3). In anderen Worten: Die Komponenten (3) sind unter radialen Boosts invariant.

Aufgabe 2

Wir betrachten die in der Vorlesung besprochene Jacobi-Gleichung der Geodätischen Deviation in Komponenten bezüglich einer parallel-transportierten orthonormalen Basis

$$\frac{d^2n^a}{d\tau^2} = -c^2 R^a{}_{0b0} n^b \,. \tag{5}$$

Hier tritt ein c^2 auf, weil wir auf den linken Seite gemäß $ds = c\, d\tau$ die Differentation nach der Eigenlänge durch die nach der Eigenzeit ersetzt haben.

Wir betrachten diese Gleichung für den Fall radialer Geodätischer in der Schwarzschild-Geometrie, für die die Komponenten des Krümmungstensors aus Aufgabe 1 entnommen werden können. Zeigen Sie, dass dann

$$\frac{d^2n^1}{d\tau^2} = \frac{c^2 R_s}{r^3} n^1 \,, \tag{6a}$$

$$\frac{d^2n^2}{d\tau^2} = -\frac{c^2 R_s}{2r^3} n^2 \,, \tag{6b}$$

und identisch für n^3 statt n^2.

Wenden Sie diese auf einen elastischen Körper an, der im Gravitationsfeld der Schwarzschild-Metrik frei fällt. Benachbarte Massenelemente würden in radialer Richtung gemäß (6a) auseinander bzw. in transversaler Richtung gemäß (6b) zueinander driften, wenn Sie nicht durch elastische Kräfte des Materials daran gehindert würden. Wir wollen diese elastischen Kräfte berechnen.

Betrachten Sie dazu einen Stab der Länge ℓ, konstanter Massendichte ρ und quadratischem Querschnitt $q = a^2$, wobei die Seitenlänge $a \ll \ell$ genügt. Die Längsrichtung des Stabes sei während des Falls radial ausgerichtet. Zeigen Sie, dass die Längsspannung (Kraft pro Querschnittsfläche), die am Querschnitt durch den Mittelpunkt des Stabes auftritt, gemäß (6a) berechnet werden kann zu

$$T_{\|} = \frac{\rho c^2}{8} \cdot \left(\frac{\ell}{R_s}\right)^2 \cdot \left(\frac{R_s}{r^3}\right)^3 \,. \tag{7}$$

Spezialisieren Sie nun auf $r = R_s$ (Fall durch den Horizont eines schwarzen Lochs), $\rho = 1 \cdot \mathrm{g} \cdot \mathrm{cm}^{-3}$ (Dichte von Wasser $\approx$ durchschnittliche Dichte des menschlichen Körpers), $\ell = 180\,\mathrm{cm}$ (Größe eines Menschen) und $b = 33\,\mathrm{cm}$ (Breite eines Menschen). Zeigen Sie, dass (7) dann geschrieben werden kann als

$$T_{\|}/E = Z \left(\frac{M_\odot}{M} \cdot 10^4\right)^2 \,. \tag{8}$$

Dabei ist $M_\odot = 2 \cdot 10^{33}\,\mathrm{g}$ die Masse der Sonne und $E = 10^5\,\mathrm{g}/(\mathrm{s}^2\,\mathrm{cm})$ die Zugspannung, die eine Gewichtskraft von $100\,\mathrm{Kp}$ auf eine Querschnittsfläche von $b^2 = 10^3\,\mathrm{cm}^2$ verteilt („Schmerzgrenze“). Z ist ein Zahlenfaktor, den Sie bestimmen sollen. Schätzen Sie ab, oberhalb welcher Werte für die Masse M ein Sprung durch den Horizont eines schwarzen Lochs unterhalb der Schmerzgrenze liegt.

In der folgenden Aufgabe berechnen wir, wie viel Zeit (Eigenzeit) Ihnen dann noch maximal verbleibt.

Aufgabe 3

Beweisen Sie folgende Aussage für die Schwarzschild-Metrik,

$$g = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{R_2}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2\big(d\theta^2 + \sin^2(\theta)\, d\varphi^2\big)\,, \tag{9}$$

die Sie jetzt auch für $r < R_s$ als gültig erachten: Jede zeitartige Kurve in der Raum-Zeit (Weltline), die $r = R_2$ mit $r = 0$ verbindet, hat eine Länge kürzer als

$$s_{\mathrm{max}} = \pi \cdot m\,. \tag{10}$$

Insbesondere ist die Eigenzeit, eines durch den Horizont $r = 2m$ in die Singularität $r = 0$ reisenden durch $\tau_{\mathrm{max}} = \pi \cdot m/c$ nach oben beschränkt. Beachten Sie: Dies gilt unabhängig davon, ob die Weltlinie Geodätische ist oder nicht, wobei die Geodätische die längste (!) unter allen Vergleichskurven ist.

Berechnen Sie damit die maximale Lebendsauer eines in das Galaktische Schwarze Loch $M = 4 \times 10^6\, M_\odot$ fallenden Beobachters nach Durchtritt durch den Horizont $r = R_s$.

Tipp: Um (10) abzuleiten gehen Sie von der Gleichung

$$\left(1 - \frac{R_s}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2\big(\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta)\, \dot{\varphi}^2\big) = 1 \tag{11}$$

aus, die für jede zeitartige Wetlinie $x^\alpha(s) = \big(t(s), r(s), \theta(s), \varphi(s)\big)$ gilt, die nach der Eigenlänge s parametrisiert ist. Zeigen Sie zuerst: Gilt $r(s_0) = R_s$, wobei $r(s) > R_s$ für $s < s_0$ und $r(s) < R_s$ für $s > s_0$, dann $\dot{r}(s) < 0$ für alle $s > s_0$. Beweisen Sie dann, dass $(-\dot{r}) > c\sqrt{(R_s/r) - 1}$ und daraus (10) durch Integration.