Übungen zur Vorlesung

Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie

von DOMENICO GIULINI

Blatt 4

Aufgabe 1

Oft stellt man im Zusammenhang mit den Einstein-Gleichungen (die wir noch kennenlernen werden) an den Energie-Impulstensor T algebraische Bedingungen, die man zusammenfassend als *Energiebedingungen* bezeichnet. Wenn wir den Energie-Impulstensor als lineare Abbildung des Vektorraumes V mit Minkowski-Metrik η auffassen, dann sind die drei gängisten Energiebedingungen durch folgende Forderungen gegeben, die jeweils für alle zeitartigen $v \in V$ gelten sollen:

$$\eta(v, Tv) \geq 0 \qquad \text{(schwache Energiebedingung)}, \tag{1a}$$

$$\eta(v, Tv) - \tfrac{1}{2}\eta(v, v)\mathrm{Spur}(T) \geq 0 \qquad \text{(starke Energiebedingung)}, \tag{1b}$$

$$\eta(Tv, Tv) \geq 0 \leq \eta(v, Tv) \qquad \text{(Energiedominanzbedingung)}. \tag{1c}$$

Interpretieren Sie (1a) und (1c) geometrisch als Einschränkung an das Bild der linearen Abbildung T und genauso (1b) als Einschränkung an das Bild der linearen Abbildung $T' := T - \frac{1}{2}\mathrm{Spur}(T)\,\mathrm{id}_V$.

Zeigen Sie, dass angewandt auf eine ideale Flüssigkeit diese Bedingungen jeweils äquivalent sind zu:

- Schwache Energiebedingung:

$$\rho \geq 0 \quad \text{und} \quad p \geq -\rho c^2\,. \tag{2a}$$

- Starke Energiebedingung:

$$p \geq \begin{cases} -\rho c^2/3 & \text{falls } \rho \geq 0, \\ -\rho c^2 & \text{falls } \rho < 0. \end{cases} \tag{2b}$$

- Energiedominanzbedingung:

$$\rho \geq 0 \quad \text{und} \quad -\rho c^2 \leq p \leq \rho c^2\,. \tag{2c}$$

Aufgabe 2

Die Bezeichnungen und Verhältnisse seien wie in Aufgabe 1. Wir bezeichnen ferner mit $Z = \{v \in V : \eta(v,v) > 0\} \subset V$ die Menge der zeitartigen Vektoren. Zeigen Sie, dass diese in zwei jeweils konvexe Zusammenhangskomponenten zerfällt, $Z = Z_+ \cup Z_-$, und dass gilt: Ist $n \in Z_+$ und $v \in Z$, dann $v \in Z_\pm \Leftrightarrow \eta(n,v) \gtrless 0$. Zeigen sie weiter, dass die Energiedominanzbedingung (1c) äquivalent der Bedingung ist, dass $T : V \to V$ die Zusammenhangskomponenten $Z_\pm$ jeweils auf sich abbildet. Wegen der Stetigkeit der Abbildung T gilt dies dann auch für deren Abschlüsse $\bar{Z}_\pm$. Sei $\{e_0, e_1, \cdots, e_{n-1}\}$ eine bezüglich η orthonormierte Basis von V mit zeitartigem e_0. Beweisen Sie nun, dass die Energiedominanzbedingung folgende Ungleichungen impliziert

$$T_{00} \geq |T_{ab}| \tag{3}$$

für alle $a, b \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$, wobei $T_{ab} := \eta(e_a, Te_b)$. Tipp: Betrachten Sie Ausdrücke der Form $\eta\big(e_0 \pm e_a, T(e_0 \pm e_b)\big)$ und $\eta\big(e_0, T(e_0 \pm e_a)\big)$. Kann man auch umgekehrt schließen, dass aus der Gültigkeit von (3) bezüglich einer fest gewählten η-orthonormierten Basis die Energiedominanzbedingung folgt?

Aufgabe 3

Sei $\gamma : I \to M$ eine mindestens zweimal stetig differenzierbare Kurve auf der Mannigfaltigkeit M. Bezüglich einer Karte (U, ϕ) können wir diese durch eine Kurve $z : I \to \mathbb{R}^n$, $z = \phi \circ \gamma$, repräsentieren, wobei wir vereinfachend annehmen, dass $\gamma(I) \subset U$, d.h. die Kurve ganz im Kartengebiet verläuft. Sei $\{e_\alpha : \alpha = 0, \cdots n-1\}$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$, dann ist $z = z^\alpha e_\alpha$, wobei $z^\alpha : I \to \mathbb{R}$ die Komponentenfunktionen von z sind. Auf M sei eine nicht-ausgeartete, symmetrische Bilinearform g definiert (eine "Metrik"), die in der Karte (U, ϕ) die Form annimmt $g|_U = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \otimes dx^\beta$, mit $g_{\alpha\beta} : \phi(U) \to \mathbb{R}$ als Komponentenfunktionen.

Auf der Menge der Kurven (Achtung: unter "Kurven" sind immer die *Abbildungen* vertstanden, nicht nur deren Bilder) definieren wir das reellwertige Energiefunktional durch

$$E(\gamma) = \frac{1}{2}\int_I g(\dot\gamma, \dot\gamma)d\lambda\,. \tag{4}$$

Zeigen Sie, dass

$$E(\gamma) = \frac{1}{2}\int_I g_{\alpha\beta}\big(z(\lambda)\big)\dot z^\alpha(\lambda)\dot z^\beta(\lambda)\; d\lambda\,. \tag{5}$$

Wir betrachten neben γ nun Vergleichskurven mit gleichen Endpunkten und suchen unter diesen die stationären Punkte des Energiefunktionals. Diese müssen den zugehörigen Euler-Lagrange Gleichungen genügen. Zeigen Sie, dass diese äquivalent sind der Geodätengleichung

$$\ddot z^\mu(\lambda) + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\big(z(\lambda)\big)\, \dot z^\alpha(\lambda)\dot z^\beta(\lambda) = 0\,, \tag{6}$$

wobei (mit $g_{\alpha\beta,\nu} := \partial g_{\alpha\beta}/\partial x^\nu$)

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} := \tfrac{1}{2} g^{\mu\nu}\big(-g_{\alpha\beta,\nu} + g_{\nu\alpha,\beta} + g_{\beta\nu,\alpha}\big)\,. \tag{7}$$

Zeigen Sie weiter: Erfüllt eine Bahnkurve $z(\lambda)$ die Gleichung (6), dann gilt

$$\frac{d}{d\lambda}\Big(g_{\alpha\beta}\big(z(\lambda)\big)\,\dot{z}^{\alpha}(\lambda)\dot{z}^{\beta}(\lambda)\Big)=0\,. \tag{8}$$

Der Integrand des Energiefunktionals ist also entlang der Lösungskurve konstant. Geodätische (Lösungskurven der Geodätengleichung) sind also an jedem Punkt stets entweder *zeitartig* ($g(\dot\gamma,\dot\gamma)>0$), *lichtartig* ($g(\dot\gamma,\dot\gamma)=0$) oder *raumartig* ($g(\dot\gamma,\dot\gamma)<0$).

Außerdem folgt: Die Lösungskurve $\gamma(\lambda)$ bleibt nach Umparametrisierung $\lambda\to\lambda':=f(\lambda)$ genau dann Lösungskurve von (6), wenn f die Form hat $f(\lambda)=a\lambda+b$ mit $a\in\mathbb{R}-\{0\}$ und $b\in\mathbb{R}$. Man nennt diese Klasse der Parameter *affine Parametrisierungen*. Machen Sie sich klar, dass sowohl für raumartige als auch zeitartige Geodätische die Bogenlänge ein affiner Parameter ist und dass deshalb *jeder* affine Parameter die Form $\lambda=as+b$ hat, wobei s die Bogenlänge ist. Für lichtartige geodätische gibt es zwar den Begriff des affinen Parameters, nicht aber den Begriff der Bogenlänge.

Aufgabe 4

Auf der Einheitssphäre $S^2_1:=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3\mid\|\vec{x}\|=1\}$ führen wir (im Komplement des Nullmeridians) wie üblich Polarkoordinaten $x^1=\theta$ und $x^2=\varphi$ ein. Dann ist

$$g_{ab}(z)\dot{z}^a\dot{z}^b=\dot\theta^2+\sin^2(\theta)\,\dot\varphi^2\,. \tag{9}$$

Zeigen Sie, dass die Geodätischen genau die affin parametrisierten Großkreise (oder Stücke von diesen) sind. Zeigen Sie dies einerseits anhand der Euler-Lagrange Gleichungen des Energiefunktionals , indem Sie von der Tatsache Gebrauch machen, dass diese alle räumlichen Drehungen als Symmetrien besitzen.

Auf der anderen Seite können Sie auch ohne Rechnung mit Hilfe einer Spiegelsymmetrie nach folgendem Schema argumentieren: Unter einer Spiegelung an einer Ebene duch den Ursprung (etwa der $z=0$ Ebene) bleibt ein Großkreis (hier der Äquator) punktweise fest. Der Großkreis ist also eine Fixpunktmenge einer Isometrie (denn er stellt eine Isometrie im euklidischen $\mathbb{R}^3$ dar, dessen Geometrie die der Sphäre induziert). Unter einer Isometrie wird aber eine Geodätische auf eine Geodätische abgebildet (warum?). Betrachte nun eine Geodätische, die auf und tangential zum Großkreis startet. Würde sie nicht mit dem Großkreis identisch sein, so wäre ihr Bild unter der Spiegelung eine andere Geodätische mit gleichen Anfangsort und gleicher Anfangsgeschwindigkeit. Das ist aber unmöglich, weil ......