Übungen zur Vorlesung

Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie

von DOMENICO GIULINI

Blatt 5

Aufgabe 1

Diese Aufgabe schließt direkt an Aufgabe 3 von Blatt 4 an. Die Voraussetzungen sind wie dort. Wir betrachten also die Menge aller mindestens 2-mal stetig differenzierbaren Kurven, die zwei fest gewählte Punkte $p_{1,2} \in M$ verbinden. Auf dieser Menge betrachten wir nun nicht das Energiefunktional (wie in Aufgabe 3 von Blatt 4), sondern das folgende Längenfunktional:

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_I \sqrt{\left|g(\dot\gamma, \dot\gamma)\right|}\, d\lambda = \int_I \underbrace{\sqrt{\left|g_{\alpha\beta}\big(z(\lambda)\big)\dot z^\alpha(\lambda)\dot z^\beta(\lambda)\right|}}_{=:L(\lambda)}\, d\lambda\,. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass die Bedingung der Stationarität dieses Funktionals (also die Euler-Lagrange-Gleichungen) äquivalent ist zu

$$\ddot z^\mu(\lambda) + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\big(z(\lambda)\big)\,\dot z^\alpha(\lambda)\dot z^\beta(\lambda) = f(\lambda)\dot z^\mu(\lambda)\,, \tag{2}$$

wobei $f = \dot L/L$ und die Γ wir in Aufgabe 3 von Blatt 4 definiert sind.

Aufgabe 2

Auf einer Mannigfaltigkeit M mit Metrik g (nicht ausgeartet aber nicht notwendig positiv definit) betrachte man (in einem Kartengebiet) Lösungen der Gleichung (2), wobei $f : \mathbb{R}I \to \mathbb{R}$ irgend eine stetige Funktion sei. Solche Lösungen bezeichnet man als *Autoparallele*. *Geodätische* sind spezielle Autoparallele, nämlich solche für $f \equiv 0$.

Zeigen Sie: Ist $F(\lambda) := g_{\alpha\beta}(z(\lambda))\dot z^\alpha(\lambda)\dot z^\beta(\lambda)$ und $z(\lambda)$ Autoparallele zur Funktion f, dann

$$F(\lambda) = F_0 \exp\left(2\int_{\lambda_0}^{\lambda} d\lambda' f(\lambda')\right)\,, \tag{3}$$

mit $F_0 := F(\lambda_0)$. (Tipp: Berechnen Sie die Ableitung von F unter Benutzung der Autoparallelen-Gleichung.) Das bedeutet: Ist g indefinit, dann ist F entlang einer Autoparallelen entweder immer positiv, immer negativ, oder immer verschwindend. Autoparallele sind also immer ganz zeit-, raum-, oder lichtartig.

Zeigen Sie weiter: Ist $\lambda \mapsto \sigma := h(\lambda)$ eine Reparametrisierung (d.h. h ist streng monoton und mindestens zweimal stetig differenzierbar), dann ist (2) äquivalent zu

$$z''^\mu(\sigma) + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\big(z(\sigma)\big)\, z'^\alpha(\sigma) z'^\beta(\sigma) = \frac{f(\lambda)\dot h(\lambda) - \ddot h(\lambda)}{\dot h^2(\lambda)}\, z'^\mu(\sigma)\,, \tag{4}$$

wobei ein Strich eine Ableitung nach σ und ein Punkt eine Ableitung nach λ bezeichnet. Schließen Sie daraus, dass eine Autoparallele zur Funktion f nach Reparametrisierung $\lambda \mapsto \sigma := h(\lambda)$ wieder eine Autoparallele zur Funktion $\hat{f} := \left[(f\dot{h} - \ddot{h})/\dot{h}^2\right] \circ h^{-1}$ ist. Verstehen Sie, warum hier ganz rechts h^{-1} stehen muss?

Beweisen Sie damit: Eine Autoparallele zur Funktion f ist Geodätische nach Umparametrisierung $\lambda \mapsto \sigma := h(\lambda)$ mit

$$h(\lambda) = a + b \int_{\lambda_0}^{\lambda} d\lambda' \exp\left(\int_{\lambda_0}^{\lambda'} d\lambda'' f(\lambda'')\right) , \tag{5}$$

mit $a = h(\lambda_0)$ und $b = \dot{h}(\lambda_0)$. Zeigen Sie anhand dieser Formel erneut, dass eine Geodätische nach Umparametriesierung wieder eine Geodätische ist genau dann, wenn h eine affine Abbildung von $\mathbb{R}$ auf sich ist und dass unter dieser affinen Klasse von Parametern auch die Bogenlänge (definiert durch das Längenfunktional) enthalten ist. (Tipp: Letzteres ist einfach, wenn Sie das Ergebnis von Aufgabe 1 benutzen, dass die stationären Punkte des Längenfunktionals Autoparallele zur Funktion $f = \dot{L}/L$ sind.)

Aufgabe 3

Aus den beiden Aufgaben 1 und 2 folgt, dass die stationären Punkte des Längenfunktionals genau die Autoparallelen sind. Was kann man darüber sagen, in welchen Fällen sie echte Minima oder Maxima sein können? Diskutieren Sie die Fälle definiter und indefiniter g separat und unterteilen Sie den indefiniten Fall nochmals danach, ob die Autoparallelen zeit, raum-, oder lichtartig sind. Machen Sie sich letztere Verhältnisse für den Minkowski-Raum klar und betrachten Sie die Fälle, in denen die beiden zu verbindenden Endpunkte $p_{1,2}$ zeit, raum-, oder lichtartig separiert sind.