Übungen zur Vorlesung

Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie

von DOMENICO GIULINI

Blatt 6

Aufgabe 1

Betrachten Sie auf der “oberen Halbebene” $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ die Riemann’sche Metrik

$$g = g_{ab} dx^a \otimes dx^b = \frac{dx \otimes dx + dy \otimes dy}{y^2} \,. \tag{1}$$

Bestimmen Sie alle Geodätischen (stationäre Punkte des Energiefunktionals) und zeigen Sie, dass diese entweder vertikale Gerade $x = \mathtt{konst.}$ oder Bögen von Kreisen sind, deren Mittelpunkte auf der x-Achse liegen.

Tipp: Stellen Sie die die beiden Euler-Lagrange-Gleichung zum Energiefunktional für $x(s)$ und $y(s)$ auf. Wählen Sie o.B.d.A als Parameter s die Bogenlänge; dann gilt für alle s, dass $[\dot{x}^2(s) + \dot{y}^2(s)]/y^2(s) = 1$. Zeigen Sie: Entweder verschwindet $\dot{x}(s) = 0$ für alle Punkte der Bahn oder keinen. Im zweiten Fall ist also x eine monotone Funktion der Bogenlänge und Sie dürfen y statt als Funktion von s als Funktion von x auffassen. Die Differentialgleichung für $y(x)$ können Sie leicht integrieren. Ist (M, g) *geodätisch vollständig*, d.h. exsistieren alle Geodätische für alle Werte $s \in \mathbb{R}$ der Bogenlänge?

Aufgabe 2

Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit kovarianter Ableitung ∇ und $\{e_a : a = 1, \cdots, n\}$ und $\{\theta^a : a = 1, \cdots, n\}$ lokale, Felder von Basen bzw. Ko-Basen. Wie in der Vorlesung schreiben wir $\nabla_{e_a} e_b = \omega^c_{ab} e_c$, wobei ω^c_{ab} die zu ∇ gehörigen Zusammenhanhskoeffizienten heißen und $\omega^c_b := \omega^c_{ab}\theta^a$ die Zusammenhangs-1-Form.

In der Vorlesung wurden Torsion und Krümmung definiert:

$$T = \tfrac{1}{2} T^a_{cd}\, e_a \otimes (\theta^c \wedge \theta^d) \qquad \in S(TM \otimes \Lambda^2 M)\,, \tag{2a}$$

$$\Omega = \tfrac{1}{2} \Omega^a{}_{bcd}\, (e_a \otimes \theta^b) \otimes (\theta^c \wedge \theta^d) \qquad \in S(TM \otimes T^*M \otimes \Lambda^2 M)\,, \tag{2b}$$

(2c)

Ferner wurde gezeigt, dass diese den Cartan’schen Strukturgleichungen genügen:

$$T^a = d\theta^a + \omega^a_b \wedge \theta^b\,, \tag{3a}$$

$$\Omega^a_b = d\omega^a_b + \omega^a_n \wedge \omega^n_b\,, \tag{3b}$$

wobei $T^a := \frac{1}{2} T^c_{cd} \theta^c \wedge \theta^d$ und $\Omega^a_b := \frac{1}{2} \Omega^a{}_{b\,cd} \theta^c \wedge \theta^d$.

Leiten Sie daraus die 1. und 2. Bianchi-Identität her:

$$0 = dT^a + \omega^a_b \wedge T^b - \Omega^a_b \wedge \theta^b \qquad \text{(1. Bianchi-Identität)}, \tag{4a}$$

$$0 = d\Omega^a_b + \omega^a_n \wedge \Omega^n_b - \Omega^a_n \wedge \omega^n_b \qquad \text{(2. Bianchi-Identität)}. \tag{4b}$$

Zeigen Sie, dass für torsionsfreie Zusammenhänge die 1. und 2. Bianchi-Identität äquivalent sind zu

$$0 = \Omega^a{}_{l\,mn} \theta^l \wedge \theta^m \wedge \theta^n \quad \Leftrightarrow \quad \Omega^a{}_{l\,mn} + \Omega^a{}_{m\,nl} + \Omega^a{}_{n\,lm} = 0, \tag{5a}$$

$$0 = \nabla_l \Omega^a{}_{b\,mn} \theta^l \wedge \theta^m \wedge \theta^m \quad \Leftrightarrow \quad \nabla_l \Omega^a{}_{b\,mn} + \nabla_m \Omega^a{}_{b\,nl} + \nabla_n \Omega^a{}_{b\,lm} = 0. \tag{5b}$$

Aufgabe 3

Wendet man (5b) auf den Fall des Levi-Civita-Zusammenhangs an, dann gilt mit $\omega^c_{ab} = \Gamma^c_{ab}$ und $\Omega^a_{bcd} = R^a_{bcd}$, mit

$$R^a_{bcd} = \partial_c \Gamma^a_{db} - \partial_d \Gamma^a_{cb} + \Gamma^a_{cn} \Gamma^n_{db} - \Gamma^a_{dn} \Gamma^n_{cb}, \tag{6}$$

entsprechend

$$\nabla_l R^a{}_{b\,mn} + \nabla_m R^a{}_{b\,nl} + \nabla_n R^a{}_{b\,lm} = 0. \tag{7}$$

Beweisen Sie mit Hilfe dieser Gleichung, dass für den Einstein-Tensor $G^a_m := R^a_m - \frac{1}{2} \delta^a_m R$ gilt (hier in "gemischen" Komponenten geschrieben, also ein Index oben, der andere unten)

$$\nabla_a G^a_m = 0. \tag{8}$$

Tipp: Kontrahieren Sie (7) erst über das Indexpaar (al) und dann nochmals über das Indexpaar (bn) (durch Multiplikation mit g^{bn}). Nutzen Sie dabei, dass die Levi-Civita kovariante Ableitung $\nabla g = 0$ erfüllt, also - in Komponenten - sowohl $\nabla_a g_{bc} = 0$ als auch $\nabla_a g^{bc} = 0$. (Können Sie von den zuletzt genannten Gleichungen die 2. aus der 1. herleiten?).