Übungen zur Vorlesung

Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie

von DOMENICO GIULINI

Blatt 7

Aufgabe 1

Betrachten Sie eine Raum-Zeit Metrik der Form

$$g = \left(1 + \frac{2\phi(\vec{x})}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right), \tag{1}$$

wobei $\vec{x} = (x, y, z)$.

Zeigen Sie, das die Gleichung der zugehörigen Geodätischen für die räumlichen Koordinaten gegeben sind durch

$$\ddot{x}^a(\tau) = -\dot{t}^2(\tau)\, \phi_{,a}(\vec{x}(\tau)), \tag{2}$$

wobei $\phi_{,a} := \partial\phi/\partial x^a$ und ein Punkt die Ableitung nach der Eigenzeit τ (oder einem dazu affin-äquivalenten Parameter) anzeigt.

Mit Hilfe der Geodätengleichung für die zeitliche Komponente können Sie sowohl $\dot{t}$ eliminieren als auch die Ableitungen nach τ durch Ableitungen nach der Koordinatenzeit t ersetzen. Zeigen Sie, dass Sie räumlichen Komponenten der Geodätengleichung dann folgende Form annehmen (ein Strich bezeichnet nun die Ableitung nach t):

$$x''^a + \phi_{,a} - \frac{2\phi_{,b}}{1 + \frac{2\phi}{c^2}} \frac{x'^a x'^b}{c^2} = 0. \tag{3}$$

Bei Vernachlässigung von Termen $(v/c)^2$ ergibt sich also gerade die Newton'sche Bewegungsgleichung im Gravitationspotential ϕ.

Aufgabe 2

Wir betrachten das Längenfunktional zur Metrik (1) für zeitartige Kurven,

$$\begin{aligned} L(\lambda_1, \lambda_2) &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \sqrt{g_{\alpha\beta}\left(x(\lambda)\right)\dot{x}^\alpha(\lambda)\dot{x}^\beta(\lambda)} \\ &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \sqrt{\left(1 + \frac{2\phi(\vec{x}(t))}{c^2}\right) c^2\dot{t}^2 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2}\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Dieses ist invariant unter Reparametriesierungen, so dass wir auch die Koordinatenzeit t als Parameter verwenden können. Dann wird aus (4)

$$
\begin{aligned}
L(t_1,t_2) &= \int_{t_1}^{t_2} c\,dt \sqrt{\left(1+\frac{2\phi(\vec{x}(t))}{c^2}\right)-\frac{\vec{v}^2}{c^2}} \\
&= c(t_2-t_1)+c\int_{t_2}^{t_2} dt\, \left(\frac{\phi(\vec{x}(t))}{c^2}-\frac{\vec{v}^2}{2c^2}\right)+O(4)\,,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

wobei $O(4)$ Terme bezeichnet, in denen $1/c$ in mindestens 4. Potenz auftritt.

Wir betrachten nun speziell $\phi(\vec{x}) = gz$ mit $g > 0$ konstant, entsprechend einem homogenen Newton'schen Gravitationsfeld $\vec{g} = -\vec{\nabla}\phi = -g\vec{e}_z$. In diesem betrachten wir zwei baugleiche Uhren, U und U', wobei U im Koordinatenursprung ruht und U' zum Zeitpunkt $t_1 = 0$ mit Anfangsgeschwindigkeit v vom Koordinatenursprung senkrecht nach oben, also entlang der positiven z-Achse geworfen wird. Die Flugbahn genügt (3), wobei Sie den letzten Term $\propto c^{-2}$ vernachlässigen können. Berechnen Sie den Unterschied der Eigenzeiten von U und U' zum Zeitpunkt $t_2 > 0$ ihres zusammentreffens im Ursprung, also nachdem U' ihre maximale Höhe h erreicht hat und wieder durch den Ursprung passiert. Benutzen Sie dazu die Formel (5) unter Vernachlässigung der Terme $O(4)$.

Aufgabe 3

Sei (M, g) Semi-Riemann'sche Mannigfaltigkeit und ∇ eine kovariante Ableitung. Zeigen Sie, dass für alle $K, X, Y \in ST^1_0 M$ gilt:

$$
\begin{aligned}
(L_K g)(X,Y) =& g(X,\nabla_Y K)+g(Y,\nabla_X K) \\
&+ Q(K,X,Y)-\Theta(X,Y,K)-\Theta(Y,X,K)\,.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Dabei sind Q und Θ in $ST^0_3 M$ definiert durch $Q(K,X,Y) := (\nabla_K g)(X,Y)$ und $\Theta(X,Y,K) := g(X, T(Y,K))$ mit $T =$ Torsion. Zeigen Sie weiter: Ist $Q = 0$ und Θ total antisymmetrisch, dann

$$
L_K g_{ab} := (L_K g)(e_a, e_b) = \nabla_a K_b + \nabla_b K_a\,, \tag{7}
$$

wobei $\nabla_a K_b := g(\nabla_{e_a} K, e_b)$.

Aufgabe 4

Sei wieder bezogen auf ein lokales System dualer Basisfelder $\{e_a \mid a = 1, \cdots, n\}$ und $\{\theta^a \mid a = 1, \cdots, n\}$ und $U \subseteq M$ offen die Koordinatendarstellung von $F \in ST^\ell_m M$ gegeben durch (die Klammern um die Tensorprodukte von Vektorfeldern bzw. Kovektorfeldern sind nur der besseren Lesbarkeit gesetzt)

$$
F \;=\; F^{a_1\cdots a_\ell}_{b_1\cdots b_m}\,(e_{a_1}\otimes\cdots\otimes e_{a_\ell})\otimes(\theta^{b_1}\otimes\cdots\otimes\theta^{b_m})\,. \tag{8}
$$

Wir definieren das Symbol $\nabla_c F^{a_1\cdots a_\ell}_{b_1\cdots b_m}$ durch

$$
\nabla_{e_c} F \;=:\; \nabla_c F^{a_1\cdots a_\ell}_{b_1\cdots b_m}\,(e_{a_1}\otimes\cdots\otimes e_{a_\ell})\otimes(\theta^{b_1}\otimes\cdots\otimes\theta^{b_m}) \tag{9}
$$

Machen Sie sich folgende Formel klar (Wiederholung aus der Vorlesung):

$$\begin{aligned}\nabla_c F^{a_1\cdots a_\ell}_{b_1\cdots b_m} &= e_c(F^{a_1\cdots a_\ell}_{b_1\cdots b_m}) \\ &\quad + \omega^{a_1}_{cn}\, F^{n\, a_2\cdots a_\ell}_{b_1\cdots b_m} + \cdots + \omega^{a_\ell}_{cn}\, F^{a_1\cdots a_{\ell-1}\, n}_{b_1\cdots b_m} \\ &\quad - \omega^{n}_{cb_1}\, F^{a_1\cdots a_\ell}_{n\, b_2\cdots b_m} - \cdots - \omega^{n}_{cb_m}\, F^{a_1\cdots a_\ell}_{b_1\cdots b_{m-1}\, n}\,,\end{aligned} \tag{10}$$

Zeigen Sie dann, dass

$$\begin{aligned}(\nabla_c\nabla_d - \nabla_d\nabla_c)F^{a_1\cdots a_\ell}_{b_1\cdots b_m} &= R^{a_1}{}_{n\,cd}\, F^{n\, a_2\cdots a_\ell}_{b_1\cdots b_m} + \cdots + R^{a_\ell}{}_{n\,cd}\, F^{a_1\cdots a_{\ell-1}\, n}_{b_1\cdots b_m} \\ &\quad - R^{n}{}_{b_1\,cd}\, F^{a_1\cdots a_\ell}_{n\, b_2\cdots b_m} - \cdots - R^{n}{}_{b_m\,cd}\, F^{a_1\cdots a_\ell}_{b_1\cdots b_{m-1}\, n} \\ &\quad - T^n_{cd}\nabla_n F^{a_1\cdots a_\ell}_{b_1\cdots b_m}\,.\end{aligned} \tag{11}$$

wobei in der letzten Zeile T^n_{cd} die Komponenten der Torsion sind. Machen Sie sich klar, dass alle Terme der rechten Seite von (11) bis auf den letzten der gleichen Systematik folgen wie in (10).

Tipp: Um (11) zu beweisen, machen Sie sich zunächst klar, dass mit $(\nabla_c\nabla_d - \nabla_d\nabla_c)F^{\cdots}_{\cdots}$ eigentlich $[(i_{e_d}\circ i_{e_c} - i_{e_c}\circ i_{e_d})\nabla\nabla F]^{\cdots}_{\cdots}$ gemeint ist, wobei i_X die Einsetzung des Vektorfeldes X in den ersten (am weitesten links stehenden) Tensorfaktor aus dem Kotangentialraum bezeichnet. Zeigen Sie dann allgemein, dass $(i_Y\circ i_X - i_X\circ i_Y)\nabla\nabla F = (\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]})F - \nabla_{T(X,Y)}F$, wobei T der Torsionstensor ist. Zeigen Sie zum Schluss, dass der Ableitungsoperator $\nabla^2_{XY} := \nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$ derivativ auf Tensorprodukte wirkt, d.h. $\nabla^2_{XY}(F\otimes F') = \nabla^2_{XY}F\otimes F' + F\otimes\nabla^2_{XY}F'$.

Aufgabe 5

Ein Vektorfeld K heißt *Killing-Feld* zur Metrik g wenn $L_K g = 0$. Wir betrachten eine Semi-Riemann'sche Mannigfaltigkeit (M, g) mit Levi-Civita kovarianter Ableitung ∇. Dann folgt als Spezialfall des Resultats von Aufgabe 3, dass $L_k g = 0$ äquivalent ist zu

$$\nabla_a K_b + \nabla_b K_a = 0\,. \tag{12}$$

Außerdem folgt als Spezialfall von Aufgabe 4:

$$(\nabla_c\nabla_d - \nabla_d\nabla_c)K_b = -K_a\, R^a{}_{bcd}\,. \tag{13}$$

Beweisen Sie mit Hilfe dieser beiden Gleichungen sowie der Symmetrien des Riemann-Tensors (insbesondere der ersten Bianchi-Identität), dass

$$\nabla_a\nabla_b K_c = K_n\, R^n{}_{abc}\,. \tag{14}$$

Tipp: Gehen Sie aus von $\nabla_a\nabla_b K_c$. Verwenden Sie (12) um den 2. und 3. Index zu vertrauschen, dann (13) um den ersten und 2. zu vertauschen. Wiederholen Sie diesen Prozess 2 weitere Male. Dann erhalten Sie $\nabla_a\nabla_b K_c = -\nabla_a\nabla_b K_c +$ (3 Terme mit Riemann-Tensor). Die drei Terme mit Riemann-tensor können Sie mit Hilfe der 1. Bianchi-Identität zu einem Term zusammenfassen.