Übungen zur Vorlesung

Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie

von DOMENICO GIULINI

Blatt 8

Wiederholung

In der Vorlesungen wurden die linearisierten Einstein-Gleichungen in der de Donder-Eichung besprochen. Letztere lautet

$$\partial^{\alpha}\bar{h}_{\alpha\beta} = \partial^{\alpha}\big(h_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}h\big) = 0\,, \tag{1}$$

wobei $h := \eta^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}$. Hier bezeichnet η die Minkoswski-Metrik und die Komponenten beziehen sich auf ein Koordinatensystem, in dem gilt $\{\eta_{\alpha\beta}\} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$. Ferner ist $h_{\alpha\beta} := g_{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta}$, wo g die Metrik der Raum-Zeit ist . Zur Ableitung der in $h_{\alpha\beta}$ linearisierten Einstein-Gleichungen mussten wir voraussetzen, dass Terme, die in $h_{\alpha\beta}$ und deren ersten Ableitungen quadratisch sind, vernachlässigt werden können. Außerdem ist die Quelle $T_{\alpha\beta}$ von der Ordnung $h_{\alpha\beta}$. Ist die De Donder'sche Bedingung (1) erfüllt, dann nimmt die linearisierte Einstein-Gleichung die Form an

$$\Box h_{\alpha\beta} = -2\kappa\big(T_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}T\big) \tag{2}$$

mit $T := \eta^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta}$. (In der linearisierten Theorie werden Indizes immer mit der Minkowski-Metrik verschoben).

Die De Donder'sche Eichbedingung fixiert die Eichung nicht vollständig. Wie in der Vorlesung gezeigt, haben diese die Form

$$h_{\alpha\beta} \mapsto h'_{\alpha\beta} := h_{\alpha\beta} + \partial_{\alpha}\Lambda_{\beta} + \partial_{\beta}\Lambda_{\alpha}\,. \tag{3}$$

Also gilt (nachrechnen!)

$$\partial^{\alpha}\big(h'_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}h'\big) = \partial^{\alpha}\big(h_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}h\big) + \Box\Lambda_{\beta}\,. \tag{4}$$

Ist also (1) für $h_{\alpha\beta}$ bereits erfüllt, dann erfüllt auch $h'_{\alpha\beta}$ (1) wenn $\Box\Lambda_{\beta} = 0$. Diese Gleichung kann aber immer erfüllt werden; das Argument ist genauso, wie im Fall der Elektrodynamik; s. Vorlesung. Ebenso gilt auch hier: Nach Stellen der De Donder'schen bedingung besteht noch eine "residuelle Eichfreiheit" (3) mit solchen Λ_{α}, die $\Box\Lambda_{\alpha}$ erfüllen. Wie in der Elektrodynamik kann man diese dann benutzen, um weitere Bedingungen an $h_{\alpha\beta}$ außerhalb der Quellen zu stellen.

Aufgabe 1

Zeigen Sie folgenden Satz: Ist $T_{\alpha\beta} = 0$ so kann man zusätzlich zu (1) noch folgende Eichbedingungen stellen, die zusammen mit (1) dann vollständig ist (es besteht keine weitere Eichfreiheit mehr):

$$\eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} = 0\,, \tag{5a}$$

$$\nu^{\alpha} h_{\alpha\beta} = 0\,. \tag{5b}$$

Dabei ist ν ein beliebiger zeitartiger Vektor (unabhängig vom Punkt der Raum-Zeit).

Anleitung: Betrachten Sie die Fourier-Transformierte von $h_{\alpha\beta}$

$$h_{\alpha\beta}(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4k \, \exp(ik \cdot x) \, \tilde{h}_{\alpha\beta}(k)\,, \tag{6a}$$

$$\tilde{h}_{\alpha\beta}(k) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4x \, \exp(-ik \cdot x) \, h_{\alpha\beta}(x)\,, \tag{6b}$$

und entsprechend für Λ. Hier ist $k \cdot x := k_\beta x^\beta = \eta_{\alpha\beta} k^\alpha x^\beta$. Es gilt $\tilde{h}_{\alpha\beta}(-k) = \left[\tilde{h}_{\alpha\beta}(k)\right]^*$ und $\tilde{\Lambda}(-k) = \left[\tilde{\Lambda}(k)\right]^*$ (ein $*$ bezeichnet komplexe Konjugation), da $h_{\alpha\beta}$ und Λ_α reellwertig sind.

Nun ist (3) äquivalent zu

$$\tilde{h}_{\alpha\beta}(k) \mapsto \tilde{h}'_{\alpha\beta}(k) := \tilde{h}_{\alpha\beta}(k) + ik_\alpha \tilde{\Lambda}_\beta(k) + ik_\beta \tilde{\Lambda}_\alpha(k)\,. \tag{7}$$

Gilt $\Box h_{\alpha\beta} = 0$, dann hat $h_{\alpha\beta}$ seinen Träger auf dem Lichtkegel. Das gilt auch für Λ_α.

Zeigen Sie, dass für $h'_{\alpha\beta}$ die zu (5) äquivalenten Bedingungen

$$\eta^{\alpha\beta} \tilde{h}'_{\alpha\beta} = 0\,, \tag{8a}$$

$$\nu^{\alpha} \tilde{h}'_{\alpha\beta} = 0\,, \tag{8b}$$

durch Wahl von $\tilde{\Lambda}_\alpha$ immer erfüllt werden können, wobei $h_{\alpha\beta}$ bereits (1) erfüllt:

$$k^\alpha \tilde{h}_{\alpha\beta}(k) = \tfrac{1}{2} k_\beta \tilde{h}\,. \tag{9}$$

Beachten Sie: Mit (7) ist (8) ein (scheinbar überbestimmtes) linear-inhomogenes System von 10 Gleichungen für die vier $\tilde{\Lambda}_\alpha(k)$. Dabei stellt (9) Einschränkungen an die Inhomogenität dar. Zeigen Sie zuerst, dass (9) und (8b) die Bedingung (8a) implizieren. Multiplizieren Sie dann (8b) mit ν^β und benutzen Sie die so entstehende Beziehung, um (8b) eindeutig nach $\tilde{\Lambda}_\beta(k)$ aufzulösen. Es ergibt sich ($\nu \cdot k = \nu_\alpha k^\alpha$, $\tilde{h}(\nu, \nu) = \tilde{h}_{\alpha\beta} \nu^\alpha \nu^\beta$)

$$\tilde{\Lambda}_\beta(k) = \frac{i}{(\nu \cdot k)} \left(\nu^\alpha \tilde{h}_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}\, k_\beta \, \frac{\tilde{h}(\nu, \nu)}{\nu \cdot k} \right)\,. \tag{10}$$

Damit sind die $\tilde{\Lambda}_\beta$ eindeutig durch die $\tilde{h}_{\alpha\beta}$ und die Wahl von ν bestimmt. Warum muss ν zeitartig sein?

Aufgabe 2

Wir betrachten Raumzeiten (M, g) mit *statischen* Metriken g. Diese können durch geeignete Wahl der Koordinaten stets in eine Form gebrachten werden, in der alle metrischen Koeffizienten $g_{\alpha\beta}$ 1.) von der Zeitkoordinate t unabhängig sind und 2.) die drei gemischten Komponenten g_{0b} verschwinden. Metriken für die nur ersteres zutrifft heißen *stationär*. Die statischen Metriken bilden also eine echte Untermenge der stationären Metriken.

Zeigen Sie: Für stationäre Metriken gilt mit $K = \partial/\partial t$, dass $L_K g = 0$, und für statische Metriken gilt zusätzlich $K^\downarrow \wedge dK^\downarrow = 0$, wobei $K^\downarrow := g(K, \cdot)$ die zu K gehörige 1-Form ist. (Tatsächlich gilt auch die Umkehrung: Stationäre Metriken sind dadurch definiert, dass ein zeitartiges Killing Feld K existiert, d.h. $L_K g = 0$. Eine stationäre Metrik heißt statisch, wenn das zeitartige Killing Feld die Bedingung $K^\downarrow \wedge dK^\downarrow = 0$ erfüllt. Man kann zeigen – Satz von Frobenius –, dass dann lokal die oben angegebenen speziellen Koordinatensysteme existieren.)

Aufgabe 3

Nach Aufgabe 2 können wir eine statische Metrik in lokalen Koordinaten wie folgt schreiben:

$$g = g_{\alpha\beta}(t, \vec{x})\, dx^\alpha \otimes dx^\beta = \phi^2(\vec{x})\, c^2 dt \otimes dt - \bar{g}_{ab}(\vec{x})\, dx^a \otimes dx^b \,. \tag{11}$$

Dabei haben wir den räumlichen Teil der Metrik mit einem Minuszeichen versehen, so dass $\bar{g}_{ab}(\vec{x})\, dx^a \otimes dx^b$ eine *positive*-definite Metrik auf den 3-Mannigfaltigkeiten konstanter Zeit t ist. Wir nennen $ct = x^0$.

Eine alternative Weise die Metrik g zu schreiben ist

$$g = \phi^2(\vec{x}) \left(c^2 dt \otimes dt - \hat{g}_{ab}(\vec{x})\, dx^a \otimes dx^b \right), \tag{12a}$$

wobei

$$\bar{g} = \phi^2 \hat{g} \,. \tag{12b}$$

Die zweite Form (12a) wird erst in der folgenden Aufgabe wichtig.

Zeigen Sie, dass die Christoffel-Symbole der Metrik (11) wie folgt sind: Alle Christoffel Symbole mit allen drei oder genau einem Index gleich 0 verschinden, d.h. $\Gamma^0_{00} = \Gamma^0_{ab} = \Gamma^a_{0b} = \Gamma^a_{b0} = 0$. Die anderen Komponenten sind

$$\Gamma^a_{00} = \bar{g}^{ab} \phi \phi_{,b} \,, \qquad \Gamma^0_{a0} = \Gamma^0_{0a} = [\ln(\phi)]_{,a} \,, \qquad \Gamma^a_{bc} = \bar{\Gamma}^a_{bc} \,. \tag{13}$$

Dabei sind $\bar{\Gamma}^a_{bc}$ die mit der Metrik $\bar{g}$ gebildeten Christoffel Symbole und $[\cdots]_{,a} = \partial[\cdots]/\partial x^a$.

Zeigen Sie weiter, dass die Komponenten des Ricci-Tensors der Metrik g folgende Form haben:

$$R_{00} = \phi\, \bar{\Delta} \phi \,, \tag{14a}$$

$$R_{0a} = 0 \,, \tag{14b}$$

$$R_{ab} = \bar{R}_{ab} - \frac{\bar{\nabla}_a \bar{\nabla}_b \phi}{\phi} \,. \tag{14c}$$

Hier ist $\bar{\nabla}$ die Levi-Civita kovariante Ableitung bezüglich der Metrik $\bar{g}$ und $\bar{\Delta} := \bar{g}^{ab}\bar{\nabla}_a\bar{\nabla}_b$ deren Laplace-Operator.

Beweisen Sie nun den Satz, dass die einzige statische, überall reguläre und asymptotisch Minkowski'sche Lösung der Einstein'schen Vakuumfeldgleichungen ($T_{\mu\nu} = 0$, $\Lambda = 0$) in 4 Dimensionen der Minkowskiraum ist. Diesen Umstand drückt man auch so aus: Die Einstein'sche Theorie besitzt keine nicht-trivialen *Soliton-Lösungen*. (Statische Lösungen endlicher Energie könnte man sich etwa als gravitativ gebundene Zustände von "Gravitonen" vorstellen.)

Gehen Sie zum Beweis wie folgt vor: Aus (14a) folgt $\Delta\phi = 0$. Asymptotisch Minkowski'sch bedeutet, dass $\phi \to 1$ um räumlich unendlichen. Daraus können Sie folgern, dass $\phi \equiv 1$ wenn ϕ (wegen Regularität) beschränkt ist. Aus (14c) folgt nun $\bar{R}_{ab} = 0$. In 3 Dimensionen gilt aber der Satz (den Sie an dieser Stelle unbewiesen einfach hinnehmen müssen), dass aus dem Verschwinden des Ricci-Tensors das Verschwinden des Riemann-Tensors folgt. Also ....

Aufgabe 4

Wir untersuchen die Geodätischen einer statischen Metrik. Wir nehmen dazu statt (11) die Form (12a). Stellen Sie dazu die Euler-Lagrange Gleichungen des Energiefunktionals für die Funktionen $t(\lambda)$ und $x^a(\lambda)$ auf. Zeigen Sie aus Ersterer, dass $\dot{t}\phi^2 = K = \mathrm{konst}$. Die Euler-Lagrange Gleichung für $x^a(\lambda)$ können Sie zweifach vereinfachen. Einmal, indem Sie das Ergebnis aus Aufgabe 1 benutzen, gemäß dem $\phi^2\left(c^2\dot{t}^2 - \hat{g}_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b\right) = \kappa = \mathrm{konst}$. Dann ein zweites Mal, indem Sie t statt λ als Parameter verwenden. Dazu nehmen wir an, dass $\dot{t} \neq 0$, also die Konstante K nicht verschwindet. Beweisen Sie so, dass die Euler-Lagrange-Gleichung für $x^a(\lambda)$ in folgende Form gebracht werden kann (ein Strich bezeichnet eine Ableitung nach t):

$$x''^a + \hat{\Gamma}^a_{bc}\, x'^a x'^b = -\, C\, \hat{g}^{ab}\, (\phi^2)_{,b}\,. \tag{15}$$

Hier ist $C := \kappa c^2/2K^2$ und alle Feldgrößen ($\hat{\Gamma}$, ϕ, $\hat{g}$) werden wie üblich bei bei $x(t)$ ausgewertet.

Damit ist insbesondere folgender Satz bewiesen: Lichtartige Geodätische ($\kappa = 0$) in statischen Raumzeiten sind so, dass Ihre Projektionen in die 3-dimensionalen räumlichen Hyperflächen $t = \mathrm{konst}$. Geodätische bezüglich der Metrik $\hat{g}$ sind, wobei t affiner Parameter ist. Man nennt deshalb $\hat{g}$ auch die *optische Metrik* des Raumes. (Achtung: Im Allgemeinen gibt es in einer Raumzeit keine kanonisch definierte Familie von Hyperflächen, die man mit "dem Raum" identifizieren könnte und daher auch keinen natürlichen Begriff von "räumlicher Projektion". In statischen Raumzeiten sind diese Begriffsbildungen aber möglich.)