Übungen zur Vorlesung

Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie

von DOMENICO GIULINI

Blatt 9

Wiederholung aus der Vorlesung

In der Vorlesung wurde die Lichtausbreitung in der statischen Metrik

$$g = \left(1 + \frac{2\phi(\vec{x})}{c^2}\right) c^2 dt \otimes dt - \left(1 - \frac{2\phi(\vec{x})}{c^2}\right) d\vec{x} \otimes d\vec{x} \tag{1}$$

diskutiert unter Benutzung des Ergebnisses von Aufgabe 3 auf Blatt 5, gemäß dem die räumliche Projektion lichtartiger Geodätischer selbst geodätische in der „optischen Metrik“ $\hat{g}_{ab} := -g_{ab}/g_{00}$ sind. Für (1) ist diese in führender (linearer) Ordung in ϕ/c^2 gegeben durch

$$\hat{g}_{ab}(\vec{x}) = \left(1 - \frac{4\phi(\vec{x})}{c^2}\right) \delta_{ab} \,. \tag{2}$$

Die in dieser optischen Metrik gemessene „optische Weglänge“ $d\hat{s}$ unterscheidet sich von der in den Koordinaten (x^1, x^2, x^3) gemessenen euklidischen Weglänge $ds = \sqrt{\delta_{ab} dx^a dx^b}$ durch den Faktor $n(\vec{x}) = 1 - 2\phi(\vec{x})/c^2$. Man kann daher bezüglich der euklidischen Hilfsgeometrie des Raumes so rechnen, als sei man in flachen Raum, der allerdings erfüllt ist von einem optisch aktiven Medium mit variablem Brechungsindex $n(\vec{x})$. In der Vorlesung wurde so mit Hilfe der Geodätengleichung in der optischen Metrik (Eikonalgleichung) gezeigt, dass die Differenzvektoren $\vec{\alpha} := \vec{e}_f - \vec{e}_i$ zwischen dem Einheitsvektor der auslaufenden Strahlrichtung $\vec{e}_f$ und der einlaufenden Strahlrichtung $\vec{e}_i$ in führender Ordung (in ϕ/c^2) gegeben ist durch

$$\vec{\alpha}(\vec{\xi}) = -\frac{4G}{c^2} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\xi' \, \Sigma(\vec{\xi}') \frac{\vec{\xi} - \vec{\xi}'}{\|\vec{\xi} - \vec{\xi}'\|^2} \,, \tag{3a}$$

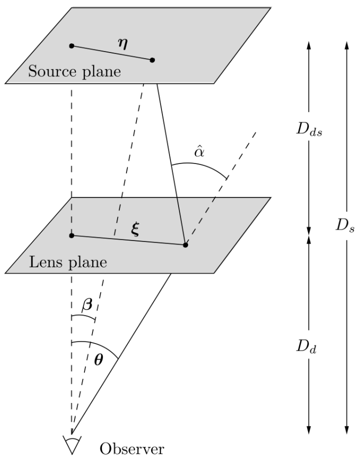
wobei $\vec{\xi} = (x, y)$, mit

$$\Sigma(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} dz \, \rho(x, y, z) \,. \tag{3b}$$

Achtung: In der Literatur (z.B. Straumann und auf der Wikipedia-Seite überGravitationslinsen[1]) wird das umgekehrte Vorzeichen für $\vec{\alpha}$ verwendet, also $\alpha := \vec{e}_i - \vec{e}_f$ definiert.

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Gravitational_lensing_formalism

Aufgabe 1



In der euklidischen Geometrie gelten die in der Abbildung gezeigten geometrische Verhältnisse zwischen der Linsenebene (Lens plane), die durch $\vec{\xi}$ parametrisiert wird, und Quellenebene (Source plane), die durch $\vec{\eta}$ parametrisiert wird. θ und β bezeichnen die Winkel, unter denen die Quelle mit bzw. ohne Linse gesehen wird. Mit D_d und D_s sind die Abstände des Beobachters von der Linsen- bzw. Quellenebene bezeichnet, wobei $D_{ds} := D_s - D_d$. Im Bild ist $\hat{\alpha} := \|\vec{\alpha}\|$, was als Funktion von $\vec{\xi}$ zu betrachten ist.

Unter einer Linsengleichung versteht man eine Abbildung, die jedem Punkt der Linsenebene einen Punkt der Quellenebene zuordnet, mit den obigen Bezeichnungen also $\vec{\eta}$ als Funktion von ξ darstellt . Zeigen Sie

$$\vec{\eta} = \frac{D_s}{D_d}\,\vec{\xi} + D_{ds}\vec{\alpha}(\vec{\xi})\,. \tag{4}$$

Schreiben Sie diese Gleichung in dimensionsloser Form indem Sie einen Längenparameter ξ_0 in der Linsenebene und einen Entsprechenden Längemparameter $\eta_0 := (D_s/D_d)\xi_0$ in der Quellenebene einführen und statt $(\vec{\xi},\vec{\eta})$ die Variablen $\vec{x} := \vec{\xi}/\xi_0$ und $\vec{y} := \vec{\eta}/\eta_0$ verwenden. Zeigen Sie, dass dann (4) äquivalent ist zu

$$\vec{y}(\vec{x}) := \vec{\nabla}\varphi(\vec{x})\,, \tag{5a}$$

wobei

$$\varphi(\vec{x}) := \tfrac{1}{2}\|\vec{x}\|^2 - \psi(\vec{x})\,, \tag{5b}$$

$$\psi(\vec{x}) := \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \ln\big(\|\vec{x}-\vec{x}'\|\big)\,\kappa(\vec{x}')\,d^2x'\,, \tag{5c}$$

$$\kappa(\vec{x}) := \frac{4\pi G}{c^2}\frac{D_d D_{ds}}{D_s}\Sigma(\xi_0\vec{x})\,. \tag{5d}$$

In diesen Gleichungen beziehen sich alle Vektorpfeile auf den $\mathbb{R}^2$

Zeigen Sie, dass die Spur der Hesse-Matrix $D^2\psi$ am Punkt $\vec{x}$ durch $2\kappa(\vec{x})$ gegeben ist, insbesondere also außerhalb des Trägers von κ verschwindet. Was bedeutet das für die Geometrie der Linsenbabbildung?

Aufgabe 2

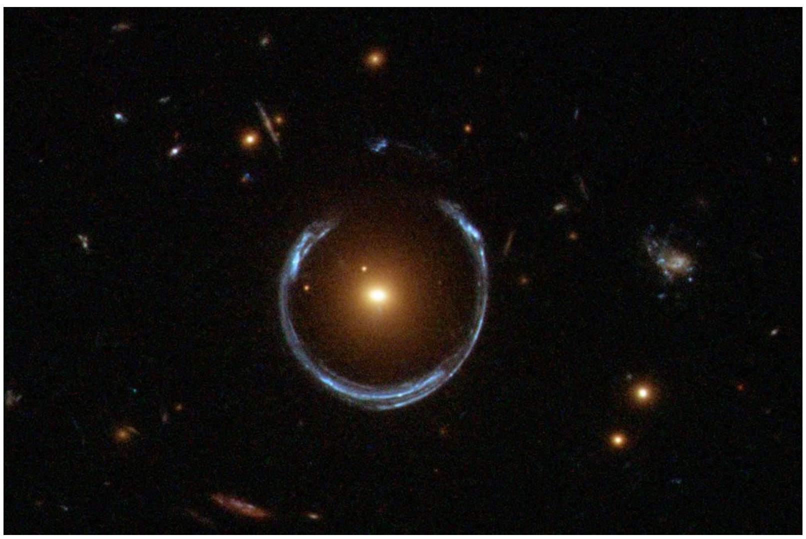
Spezialisieren Sie die Linsenabbildung von Aufgabe 1 auf $\Sigma(\vec{\xi}) = m\,\delta^{(2)}(\vec{\xi})$. Wählen Sie

$$\xi_0 = \sqrt{2 \cdot \frac{2GM}{c^2} \cdot \frac{D_d D_{ds}}{D_s}}\,. \tag{6}$$

Zeigen Sie, dass damit

$$\vec{y}(\vec{x}) = \vec{x}\left(1 - \|\vec{x}\|^{-2}\right)\,. \tag{7}$$

Diskutieren Sie die Urbilder $\vec{x}$ eines festen Quellpunktes $\vec{y}$, insbesondere $\vec{y} = \vec{0}$. Interpretieren Sie diese Abbildung geometrisch. Tipp: Siehe Bild. Es handelt sich um eine Aufnahme des Hubble-Space-Teleskops von 21. Dez. 2011. Die als Linse wirkende Massenverteilung heißt LRG 3-757. Mehr darüber müssen Sie selbst herausfinden.



Aufgabe 3

In einer Raum-Zeit (M, g) betrachten wir eine einparametrige (σ) Schar $x(s, \sigma)$ zeitartiger Geodätischer, so dass für jeden Wert $\sigma \in (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R}$ mit $\epsilon > 0$ gilt:

$$\ddot{x}^\alpha(s,\sigma) + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\big(x(s,\sigma)\big)\,\dot{x}^\beta(s,\sigma)\dot{x}^\gamma(s,\sigma) = 0\,. \tag{8}$$

Dabei bezeichnet hier und im Folgenden ein Punkt die Ableitung nach dem Kurvenparameter s (hier bei festgehaltenem σ). Wir wählen s als identisch zur Bogenlänge, so dass $g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = 1$.

Entlang der Geodätischen zu $\sigma = 0$ definieren wir das Vektorfeld $n(s)$ mit den Komponenten

$$n^\alpha(s) := \frac{\partial x^\alpha(s,\sigma)}{\partial\sigma}\bigg|_{\sigma=0}\,. \tag{9}$$

Allgemein definieren wir die kovariante Ableitung eines Vektorfeldes $v(s)$ entlang einer Kurve $x(s)$ durch

$$\nabla_s v^\alpha := \dot{v}^\alpha(s) + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\big(x(s)\big)\,\dot{x}^\mu(s)v^\nu(s)\,, \tag{10}$$

Zeigen Sie, dass das in (9) definierte Vektorfeld entlang der Geodätischen $\sigma = 0$ der der Gleichung genügt

$$\nabla_s^2 n^\alpha(s) = -R^\alpha{}_{\mu\beta\nu}\big(x(s)\big)\,\dot{x}^\mu(s)\dot{x}^\nu(s)\,n^\beta(s)\,. \tag{11}$$

wobei $R^\alpha{}_{\mu\beta\nu}$ die Komponenten des Riemann'schen Krümmungstensors sind.

Anleitung: Differenzieren Sie (8) nach σ. Ersetzen Sie darin den Term $\ddot{n}^\alpha$ durch die Terme, die Sie aus der Berechnung von $\nabla^2 n^\alpha := \nabla_s(\nabla_s n^\alpha)$ durch zweimaliges Anwenden von (10) erhalten. Darin wird auch ein Term $\ddot{x}^\alpha$ vorkommen, den Sie gemäß (8) ersetzen können. Erinnern Sie sich an die Definition des Krümmungstensors:
$R = \partial\Gamma - \partial\Gamma + \Gamma\,\Gamma - \Gamma\,\Gamma$.

Zeigen Sie zum Schluss, dass falls n die Gleichung (11) erfüllt, das auch für die Projektion $n_\perp := n - \dot{x}\,g(\dot{x}, n)$ von n senkrecht zu $\dot{x}$ gilt. Das geht ohne jede weitere Rechnung, wenn Sie folgendes bedenken: 1) $\nabla_s\dot{x}^\alpha = 0$, 2) $\nabla_s g_{\alpha\beta} = 0$ und 3) der Krümmungstensor ist in den letzten zwei Indizes antisymmetrisch. Formulieren Sie das darauf basierende Argument vollständig.

Man nennt die Gleichung (11), in der statt n die orthogonale Projektion $n_\perp$ steht, die die *Gleichung der geodätischen Deviation* oder auch *Jacobi-Gleichung*. Die spielt eine wesentliche Rolle bei der Interpretation der ART, da sie angibt, wie durch Beobachtung *relativer* Beschleunigungen der Krümmungstensor gemessen werden kann. In der Übung wird auch auch eine differentialgeometrischere (koordinatenfreie) Ableitung dieser Gleichung besprochen werden.