Übungen zur Vorlesung

Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie

von DOMENICO GIULINI

Blatt 1

Aufgabe 1

In seinem letzten Buch, den „Unterredungen“ (‘Discorsi’) von 1638, gibt Galilei eine Überlegung an, die ihm scheinbar streng und ohne Verweis auf ein tatsächlich ausgeführtes Experiment schließen lässt, dass die Fallbeschleunigung eines Körpers im Gravitationsfeld der Erde (Reibungsverluste durch Luftwiderstand werden vernachlässigt) unabhängig von seiner Masse ist. Er argumentiert so: Gegeben zwei Körper K_1 und K_2 mit Massen $m_1 < m_2$. Wir nehmen an (*Ausgangsannahme*), die Schwerebeschleunigung wüchse monoton mit der Masse; dann fiele insbesondere K_2 schneller als K_1. Nun betrachte man den Körper K_3 der entsteht, indem man K_1 und K_2 aneinanderklebt (die Masse des Klebstoffs sei vernachlässigt). Nun müsste nach Voraussetzung, da $m_3 = m_1 + m_2 > m_2$, K_3 schneller als vorher K_2 fallen. Andererseits wird aber K_2 durch den angeklebten aber langsamer beschleunigten Körper K_1 an seiner ihm natürlich zukommenden Fallbeschleunigung gehindert, so dass K_3 mit einer Beschleunigung fallen sollte, die *zwischen* der von K_1 und K_2 liegt. Das ist aber ein Widerspruch, womit die Ausgangsannahme als falsch erwiesen ist. Somit muss die Schwerebeschleunigung *unabhängig* von der Masse sein.

Einfach genial – oder? Beurteilen Sie dieses Argument hinsichtlich möglicher versteckter Annahmen. Mit welcher Kraft drückt ein Körper K der Masse m auf meine Handfläche (auf der er liegt), wenn ich diese im Schwerefeld g der Erde mit der Beschleunigung g' nach unten bewege? Begründen Sie Ihre Antwort genau.

Aufgabe 2

Betrachten Sie die Feld- und Bewegungsgleichungen der Newtonschen Gravitationstheorie:

$$\Delta\varphi(t,\vec{x}) = 4\pi G\,\rho(t,\vec{x})\,, \tag{1}$$

$$\ddot{\vec{x}}(t) = -\vec{\nabla}\varphi(t,\vec{x}(t))\,. \tag{2}$$

Was ist die mathematisch präzise Bedeutung der Aussage, diese Gleichungen seien unter einer Gruppe G invariant? Geben Sie das Transformationsgesetz der Felder und Bahnen unter Galilei-Transformationen (ohne „Zeitspiegelungen“):

$$\phi(t, \vec{x}) = \big(t + b\,,\ \mathbf{R} \cdot \vec{x} + \vec{v}t + \vec{a}\big)\,, \tag{3}$$

an, wobei $\mathbf{R}$ eine orthogonale Matrix ist ($\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^\top = \mathbf{1}$) und die anderen Parameter folgende Wertebereiche haben: $b \in \mathbb{R}$, $\vec{v}, \vec{a} \in \mathbb{R}^3$.

Man spricht von *Symmetrien*, wenn die transformierten Felder und Teilchenbahnen wieder *dieselben* Feld- bzw. Bewegungsgleichungen erfüllen. Sind die Galilei-Transformationen Symmetrien von (1,2)? Wann sagt man, eine *Lösung* sei symmetrisch unter einer Untergruppe G' von G?

Aufgabe 3

Wie in der Elektrostatik kann auch dem statischen Gravitationsfeld in der Newtonschen Theorie eine Energiedichte ϵ zugeordnet werden, die wegen der Attraktivität der Gravitation allerdings negativ ist:

$$\epsilon(\vec{x}) = \frac{-1}{8\pi G}\|\vec{\nabla}\varphi(\vec{x})\|^2\,. \tag{4}$$

Begründen die diesen Ausdruck.

Gemäß $E = mc^2$ und der Gleichheit von träger und schwerer Masse könnte man die Newtonschen Feldgleichungen nun dahingehend abändern, dass auch die im Gravitationsfeld lokalisierte ‘Massendichte’ ϵ/c^2 gleichberechtigt als Quelle auftritt:

$$\Delta\varphi = 4\pi G\left(\rho - \frac{1}{8\pi G c^2}\|\vec{\nabla}\varphi\|^2\right)\,. \tag{5}$$

Geben Sie die sphärisch-symmetrische Lösung dieser Gleichung mit asymptotischen Verhalten $\varphi(r \to \infty) \to 0$ zu folgender Dichteverteilung an:

$$\rho(\vec{x}) = \begin{cases} \sigma = \text{konst.} & \text{für } r \le R\,, \\ 0 & \text{für } r > R\,. \end{cases} \tag{6}$$

(Tipp: Durch die Feldredefinition $\psi := \exp(\varphi/2c^2)$ nimmt (5) eine sehr einfache lineare Form an, in der Sie die Gleichung für $r > R$ und $r < R$ einfach lösen können. Fordern Sie von der Lösung Endlichkeit bei $r = 0$ und stetige Differenzierbarkeit bei $r = R$.)

Wie in der Newtonschen Theorie sei die ‘gravitative Masse’ M definiert durch den (geeignet normierten) Fluss des Gravitationsfeldes nach ‘Unendlich’:

$$M := \lim_{r\to\infty} \left\{ \frac{1}{4\pi G} \int_{S^2(r)} \vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{n}\, do \right\} . \tag{7}$$

Zeigen Sie für obige Lösung, dass M als Funktion der Dichte σ und des Radius’ R folgende Form hat, wobei zur Abkürzung $\omega := \sqrt{2\pi G\sigma/c^2}$ gesetzt ist:

$$M(\sigma, R) = \frac{2c^2R}{G} \left(1 - \frac{\tanh(\omega R)}{\omega R} \right) . \tag{8}$$

Leiten Sie damit die folgende, von σ unabhängige Ungleichung her:

$$M < \frac{2c^2R}{G} . \tag{9}$$

Wie interpretieren Sie dieses Ergebnis? Warum erhöht sich im Gegensatz zur Newtonschen Theorie hier M nicht mehr beliebig, wenn Sie immer mehr Materie in das Gebiet $r < R$ bringen? Gibt es eine Lösung zu (5) mit $\rho(\vec{x}) = \delta(\vec{x})$?