Übungen zur Vorlesung

Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie

von DOMENICO GIULINI

Blatt 10

Aufgabe 1

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass durch Einführung eines Potentials

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \,, \tag{1}$$

die homogenen Maxwell-Gleichungen gelöst und die inhomogenen

$$\nabla^\mu F_{\mu\nu} := g^{\mu\lambda} \nabla_\lambda F_{\mu\nu} \,, = 4\pi j_\nu \,. \tag{2}$$

für den quellenfreien Fall, mit Hilfe der Eichbedingungen

$$\nabla^\mu A_\mu = 0 \tag{3}$$

übergehen in ($\Box := g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$)

$$\Box A_\mu - R_\mu^\nu A_\nu = 0 \,. \tag{4}$$

Um aus den quellenfreien Maxwellgleichungen (Wellenoptik) die Gesetze der geometrischen Optik abzuleiten, betrachtet man Lösungen der Maxwellgleichungen (4) in der Eichung (3) für Vektorpotentiale der Form

$$A_\mu = (a_\mu + \epsilon b_\mu + O(2)) \, \exp(i\psi/\epsilon) \,. \tag{5}$$

Dabei ist die Amplitude in einer Potenzreihe in ϵ entwickelt, d.h. a_μ, b_μ sind Vektorfelder und $O(2)$ bezeichnen Terme von mindestens quadratischer Ordnung in ϵ, und ψ ist eine relle Phasenfunktion (sog. Eikonal). Wir führen folgende Größen ein:

$$\begin{aligned} k_\mu &:= \nabla_\mu \psi && \text{Wellenzahlvektor}\,, && (6)\\ a &:= \sqrt{g^{\mu\nu} a_\mu a_\nu} && \text{Amplitude}\,, && (7)\\ f_\mu &:= a_\mu / a && \text{Polarisationsvektor}\,. && (8) \end{aligned}$$

Man setzt nun den Ansatz (5) in (3) und (4) ein und betrachtet die Konsequenzen für $\epsilon \to 0$ (Limes der geometrischen Optik). Dazu ordnet man nach steigenden Potenzen von ϵ, beginnend mit ϵ^{-2}, und setzt deren Koeffizienten einzeln gleich Null. Zeigen Sie: Für (3) ergibt dies

$$\begin{aligned} \epsilon^{-2}: &\quad \text{keine Bedingung}\,, && (9)\\ \epsilon^{-1}: &\quad k^\mu a_\mu = 0\,, && (10) \end{aligned}$$

und für (4)

$$\begin{aligned}
\epsilon^{-2}: \quad k^{\mu}k_{\mu} \quad &= 0\,, &(11)\\
\epsilon^{-1}: \quad k^{\nu}\nabla_{\nu}a_{\mu} &= -\tfrac{1}{2}(\nabla^{\nu}k_{\nu})a_{\mu}\,, &(12)
\end{aligned}$$

wobei in (12) bereits einmal Gleichung (11) verwendet wurde.

Bilden Sie ∇_{ν} von $k^{\mu}k_{\mu} = 0$ und zeigen Sie mit Hilfe der Tatsache, dass k_{μ} Gradientenfeld ist (6), dass

$$k^{\nu}\nabla_{\nu}k_{\mu} = 0\,. \tag{13}$$

Leiten Sie nun mit Hilfe von (12) ab, dass

$$ak^{\nu}\nabla_{\nu}a = -\tfrac{1}{2}a^{2}\nabla^{\nu}k_{\nu}, \quad \text{d.h.} \quad k^{\nu}\nabla_{\nu}a = -\tfrac{a}{2}\nabla^{\nu}k_{\nu}\,. \tag{14}$$

Aus letzter Gleichung können Sie die Änderung der Aplitude entlang des Lichstrahls berechnen. Betrachten Sie nun f_{μ} aus (8) und folgern Sie mit (12) und (14), dass

$$k^{\nu}\nabla_{\nu}f_{\mu} = 0\,. \tag{15}$$

Insgesamt habe Sie damit in der betrachteten Näherung (Vernachlässigung von Termen ϵ^{n} für $n \geq 0$) folgende Konsequenzen aus den Maxwellgleichungen abgeleitet: Die Lichtstrahlen sind Nullgeodäten (Gl. 11 und 13) entlang denen der Polarisationsvektor senkrecht steht (Gl. 10) und parallel verschoben wird (Gl. 15).