Übungen zur Vorlesung

Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie

von DOMENICO GIULINI

Blatt 11

Aufgabe 1

Seien g und $\tilde{g}$ zwei *konform äquivalente* Metriken auf der Raum-Zeit M; das heißt: Es gibt eine Funktion $\phi : M \to \mathbb{R}$, so dass

$$g = \exp(2\phi)\,\tilde{g}\,. \tag{1}$$

Zeigen Sie: Ist die Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to M$ eine lichtartige Geodätische bezüglich g, dann gibt es eine Reparametrisierung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass $\tilde{\gamma} := \gamma \circ f^{-1}$ eine lichtartige Geodätische bezüglich $\tilde{g}$ ist. Geben Sie f in Abhängigkeit von ϕ an.

Aufgabe 2

Betrachten Sie eine Metrik der Form

$$g = dt^2 - h_{ab}(\vec{x})dx^a dx^b \tag{2}$$

und zeigen Sie: Ist $\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto x^\alpha(\lambda)$ eine lichtartige Geodätische, dann ist ihre „räumliche Projektion“, $\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto x^a(\lambda)$ $(a = 1, 2, 3)$ eine raumartige Geodätische bezüglich der Riemannschen Metrik $h_{ab}(\vec{x})dx^a dx^b$.

Aufgabe 3

Eine allgemeine *statische Metrik* einer Raumzeit hat in geeigneten Koordinaten lokal die folgende Form:

$$g = f^2(\vec{x})dt^2 - h_{ab}(\vec{x})dx^a dx^b\,. \tag{3}$$

Sei $\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto x^\alpha(\lambda)$ eine lichtartige Geodätische bezüglich g. Benutzen Sie die Ergebnisse der beiden vorhergehenden Aufgaben und zeigen Sie damit, dass die „räumliche Projektion“ $\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto x^a(\lambda)$ $(a = 1, 2, 3)$ nach geeigneter Reparametrisierung eine raumartige Geodätische bezüglich der so genannten *optischen Metrik*

$$\tilde{h}_{ab}(\vec{x})dx^a dx^b := \frac{h_{ab}(\vec{x})}{f^2(\vec{x})}\, dx^a dx^b \tag{4}$$

ist.

Aufgabe 4

Zeigen Sie zunächst allgemein, dass die kovariante Divergenz eines antisymmetrischen Tensors 2. Stufe wie folgt geschrieben werden kann:

$$\nabla_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{\det(g)}}\partial_\alpha\left(\sqrt{\det(g)}F^{\alpha\beta}\right) . \tag{5}$$

Benutzen Sie dies in den quellenfreien Maxwellgleichungen und spezialisieren Sie diese auf den Fall einer statischen Metrik (3) und eines statischen Vektorpotentials der Form $A_\alpha = (\phi, \vec{0})$ (Elektrostatik). Zeigen Sie, dass sich die Maxwellgleichungen in diesem Fall auf die Laplacegleichung für ϕ bezüglich der „optischen Metrik" (4) reduzieren:

$$\Delta\phi := \frac{1}{\sqrt{\det(\tilde{h})}}\partial_a\left(\sqrt{\det(\tilde{h})}\tilde{h}^{ab}\partial_b\phi\right) = 0 . \tag{6}$$

Dabei bezeichnet $\tilde{h}^{ab}$ wie üblich die zu $\tilde{h}_{ab}$ inverse Metrik: $\tilde{h}^{ac}\tilde{h}_{bc} = \delta^a_b$.