Übungen zur Vorlesung

Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie

von DOMENICO GIULINI

Blatt 12

Aufgabe 1

Wir betrachten die Maxwell-Gleichungen im Minkowskiraum. Nach Einführung eines Vierer-Vektorpotentials A_μ, so dass $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, lauten diese:

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = \Box A_\mu - \partial_\mu \partial^\lambda A_\lambda = 4\pi j_\nu \,. \tag{1}$$

Durch Stellen der Eichbedingung (Lorenz-Eichung)

$$\partial^\lambda A_\lambda = 0 \tag{2}$$

entkoppeln diese.

Zeigen Sie, dass noch eine mit (2) verträgliche, residuelle Eichfreiheit der Form

$$A_\mu \mapsto A'_\mu := A_\mu + \partial_\mu \Lambda \quad \text{mit} \quad \Box\Lambda = 0 \tag{3}$$

besteht.

Formulieren Sie diese Bedingungen nun für die entsprechenden Fourier-Transformierten, wobei

$$A_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4k \, \exp(ik_\mu x^\mu) \, \tilde{A}_\mu(k) \,, \tag{4a}$$

$$\tilde{A}_\mu(k) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \, \exp(-ik_\mu x^\mu) \, A_\mu(x) \,, \tag{4b}$$

und

$$\Lambda(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4k \, \exp(ik_\mu x^\mu) \, \tilde{\Lambda}(k) \,, \tag{5a}$$

$$\tilde{\Lambda}(k) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \, \exp(-ik_\mu x^\mu) \, \Lambda(x) \,. \tag{5b}$$

Zeigen Sie mit deren Hilfe, dass durch (3) die Komponenten $\tilde{A}_\mu(k) U^\mu$ entlang eines beliebigen zeitartigen Vektors U für alle Punkte des Lichtkegels ($k_\mu k^\mu = 0$) im k-Raum zum Verschwinden gebracht werden können. Was würde schief gehen, wenn man versuchte U licht- oder raumartig zu wählen? Spezialisieren Sie nun auf freie Felder, d.h. Lösungen zu (1,2) mit $j = 0$, und zeigen Sie, dass für diese (3) hinreicht um die Funktionen $\tilde{A}'_\mu U^\mu$ und $A'_\mu U^\mu$ zum Verschwinden zu bringen. Zeigen Sie, dass diese Forderung Λ eindeutig bestimmt indem Sie $\tilde{\Lambda}(k)$ durch $\tilde{A}'_\mu(k) U^\mu$ und $k_\mu U^\mu$ ausdrücken. Wie viele Polarisationsfreiheitsgrade besitzt also jede Feldmode?

Aufgabe 2

In Analogie zu den Maxwell-Gleichungen betrachten wir nun die linearisierten Einstein-Gleichungen für das symmetrische Tensorfeld $h_{\mu\nu}$, das man nun als Tensorfeld im Minkowskiraum auffasst, wobei alle Operationen (Spurbildung, Index Hoch- und Runterziehen) mit der Minkowskimetrik $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ ausgeführt werden. Wie in der Vorlesung gezeigt, entkoppeln diese durch Stellen der Eichbedingung (de Donder Eichung)

$$\partial^\mu(h_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^\lambda_\lambda) \tag{6}$$

zu

$$\Box h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}\big(T_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T^\lambda_\lambda\big)\,. \tag{7}$$

Auch hier besteht noch eine mit (6) verträgliche, residuelle Eichfreiheit

$$h_{\mu\nu} \mapsto h'_{\mu\nu} := h_{\mu\nu} + \partial_\mu\Lambda_\nu + \partial_\nu\Lambda_\mu \quad \text{mit} \quad \Box\Lambda_\mu = 0\,. \tag{8}$$

Drücken Sie diese Eichtransformation durch die Fourier-Transformierten aus und zeigen Sie analog zu Aufgabe 1, dass diese für freie Felder ($T_{\mu\nu} = 0$) hinreichen, die vier Funktionen $U^\mu h_{\mu\nu}$ (wobei U wieder ein zeitartiger Vektor ist) *und zusätzlich* die Spur $h^\lambda_\lambda = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$ zum Verschwinden zu bringen. Zeigen Sie, dass diese Forderungen die Λ_μ eindeutig bestimmen indem Sie $\tilde{\Lambda}_\nu(k)$ durch $\tilde{h}_{\mu\nu}(k)U^\mu$, $\tilde{h}_{\mu\lambda}(k)U^\mu U^\lambda k_\nu$ und $k_\mu U^\mu$ ausdrücken. Wie viele Polarisationsfreiheitsgrade besitzt also jede Feldmode?