Übungen zur Vorlesung

Anwendungen der Allgemeine Relativitätstheorie

von DOMENICO GIULINI

Blatt 13

Aufgabe 1 (Sprung in ein schwarzes Loch)

Die Schwarzschildmetrik kann in folgender Form geschrieben werden:

$$g = \theta^0 \otimes \theta^0 - \sum_{a=1}^{3} \theta^a \otimes \theta^a \tag{1}$$

wobei

$$\begin{aligned}
\theta^0 &\equiv \theta^t &&= \exp[a(r)]\, dt\,, && (2a)\\
\theta^1 &\equiv \theta^r &&= \exp[b(r)]\, dr\,, && (2b)\\
\theta^2 &\equiv \theta^\theta &&= r\, d\theta\,, && (2c)\\
\theta^3 &\equiv \theta^\varphi &&= r\sin(\theta)\, d\varphi\,, && (2d)
\end{aligned}$$

mit

$$\exp[2a] = \exp[-2b] = 1 - \frac{2m}{r}\,. \tag{3}$$

Die Komponenten des Krümmungstensors bezüglich der angegeben orthonormierten Dualbasis sind gegeben durch (die Komponenten, die aus den aufgeführten nicht durch Umstellen der Indizes unter Beachtung der Riemann-Symmetrien hervorgehen, verschwinden):

$$\begin{aligned}
R^0{}_{101} &= \exp[-2b]\,(a'b' - a'' - a'^2) &&= 2m/r^3\,, && (4a)\\
R^0{}_{202} &= R^0{}_{303} = -\exp[-2b]\,(a'/r) &&= -m/r^3\,, && (4b)\\
R^1{}_{212} &= R^1{}_{313} = \exp[-2b]\,(b'/r) &&= -m/r^3\,, && (4c)\\
R^2{}_{323} &= \big(1 - \exp[-2b]\big)/r^2 &&= 2m/r^3\,. && (4d)
\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die angegebenen Krümmungskomponenten der Schwarzschildmetrik invariant sind unter radialen Geschwindigkeitstransformationen (α ist hier die Rapidität),

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha & 0 & 0 \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

und somit auch von einem frei fallenden Beobachter bezüglich einer mittransportierten, orthonormierten Basis gemessen werden.

Betrachten Sie nun einen frei fallenden Körper in Forme einer Säule der Länge ℓ und quadratischem Querschnitt der Breite b. Die Säulenachse zeige in radialer Richtung. Nehmen Sie an, dass sich der Schwerpunkt der Säule auf einer Geodätischen in der Schwarzschildmetrik bewegt und dass die anderen Teile der Säule durch die elastischen Kräfte innerhalb der Säule auf festen Positionen bezüglich des Schwerpunktes gehalten werden (gemessen in mitbewegten Bezugssystem), so dass die Säule der Gesamtmasse μ eine homogene Massendichte $\rho = \mu/(\ell b^2)$ besitzt.

Zeigen Sie mit Hilfe der Jacobi-Gleichung

$$\frac{d^2 n^a}{ds^2} = R^a{}_{00b}\, n^b =: K^a_b\, n^b\,, \tag{6}$$

dass ein Massenelement $d\mu$ in der Höhe h über dem Schwerpunkt eine vom Schwerpunkt weggerichtete Kraft vom Betrag (wir führen jetzt wieder c ein)

$$dF = (2mc^2 h/r^3)\, d\mu \tag{7}$$

erfährt und somit die gesamte längsgerichtete Zugspannung auf die Ebene durch den Schwerpunkt gegeben ist durch

$$T_{\parallel} = \frac{c^2}{4}\,\frac{\mu m \ell}{r^3 b^2} = \frac{\rho c^2}{8}\left(\frac{\ell}{2m}\right)^2\left(\frac{2m}{r}\right)^3 . \tag{8}$$

Zeigen Sie weiter, dass sich ganz analog eine Druckspannung senkrecht zur Bewegungsrichtung ergibt vom Betrag

$$T_{\perp} = \frac{c^2}{8}\,\frac{\mu m}{r^3 \ell} = \frac{\rho c^2}{16}\left(\frac{b}{2m}\right)^2\left(\frac{2m}{r}\right)^3 . \tag{9}$$

Spezialisieren Sie nun auf $r = 2m$ (Fall durch den Horizont eines schwarzen Lochs), $\rho = 1 \cdot g \cdot cm^{-3}$ (Dichte von Wasser $\approx$ durchschnittliche Dichte des menschlichen Körpers), $\ell = 180\,\mathrm{cm}$ (Größe eines Menschen) und $b = 33\,\mathrm{cm}$ (Breite eines Menschen). Zeigen Sie, dass (8) dann geschrieben werden kann als

$$T_{\parallel}/E = Z\left(\frac{M_{\odot}}{M}\cdot 10^4\right)^2 . \tag{10}$$

Dabei ist $M_{\odot} = 2 \cdot 10^{33}\,\mathrm{g}$ die Masse der Sonne und $E = 10^5\,\mathrm{g}/(\mathrm{s}^2\,\mathrm{cm})$ die Zugspannung, die eine Gewichtskraft von $100\,\mathrm{Kp}$ auf eine Querschnittsfläche von $b^2 = 10^3\,\mathrm{cm}^2$ verteilt. Z ist ein Zahlenfaktor, den Sie bestimmen sollen. Schätzen Sie ab, für welche Werte für M ein Sprung durch den Horizont eines schwarzen Lochs weniger belastend ist als ein Bungee-Jump?