Übungen zur Vorlesung

Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie

von DOMENICO GIULINI

Blatt 2

Aufgabe 1

Man betrachte ein System von N Massenpunkten, die sich unter alleinigem Einfluss ihres Gravitationsfeldes bewegen (selbstgravitierendes System). Was ist die (Newtonsche) potentielle Energie $U(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_N)$ des Systems? Mit einem Strich über einer zeitabhängigen Größe $A(t)$ bezeichnet man das *Zeitmittel*, das definiert ist durch

$$\overline{A} := \lim_{T\to\infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T dt\, A(t) \right\} . \tag{1}$$

Betrachten Sie nun das Zeitmittel der folgenden Größe (Zeitableitung des Virials)

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i \cdot \vec{x}_i \right) \tag{2}$$

unter der Annahme, dass ein Gleichgewichtszustand existiert für den Impuls und Ort eines jeden Teilchens beschränkte Funktionen der Zeit sind. Leiten Sie daraus ab, dass

$$\overline{U} + \overline{\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i \cdot \vec{v}_i} = 0\,. \tag{3}$$

Drücken Sie im 2. Ausdruck jeden Term $\vec{p}_i \cdot \vec{v}_i$ durch die speziell-relativistische kinetische Energie $E_{\text{kin}}^{(i)}$ des i-ten Teilchens aus. Betrachten Sie dann folgende zwei Extremfälle (m_i ist hier die *Ruhemasse* des i-ten Teilchens):

- „Newtonscher Grenzfall“ $E_{\text{kin}}^{(i)} \ll m_i c^2$:
  Zeigen Sie $\sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{v}_i = 2E_{\text{kin}}$, so dass für die (zeitlich konstante) Gesamtenergie E gilt:
  $$E = \overline{E}_{\text{kin}} + \overline{U} = -\overline{E}_{\text{kin}} < 0\,. \tag{4}$$

- „Extremrelativistischer Grenzfall“ $E_{\text{kin}}^{(i)} \gg m_i c^2$:
  Zeigen Sie $\sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{v}_i = E_{\text{kin}}$, so dass
$$E = \overline{E}_{\text{kin}} + \overline{U} = 0\,. \tag{5}$$

Was also haben speziell-relativistische Korrekturen für eine Auswirkung auf das Stabilitätsverhalten gravitativ gebundener Systeme, wie z.B. Sterne?

Aufgabe 2

In einer auf einem Skalarfeld Φ (mit der physikalische Dimension eines Geschwindigkeitsquadrats) basierenden speziell relativistischen Theorie der Gravitation, kann die Weltlinie eines im Gravitationsfeld frei fallenden Testteilchens (der Masse m) bezüglich eines Inertialsystems durch eine Abbildung $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ charakterisiert werden, die stationärer Wert des Wirkungsfunktionals ist. Seien x_1 und x_2 zwei zeitartig getrennte Punkte im Minkowskiraum und $\mathcal{P}$ die Menge aller zweimal stetig differenzierbaren zeitartigen Weltlinien mit Anfangspunkt x_1 und Endpunkt x_2, dann ist das Wirkungsfunktional gegeben durch
$$\mathcal{L} : \mathcal{P} \to \mathbb{R}\,, \quad \mathcal{L}[z; x_1, x_2] := -mc \int_{x_1}^{x_2} d\tau \; \exp\bigl(\phi(z(\tau)/c^2)\bigr) \sqrt{\eta_{ab}\dot{z}^a(\tau)\dot{z}^b(\tau)}\,, \tag{6}$$
wobei $\phi := c^2 \ln(1 + \Phi/c^2)$ und ein Punkt die Ableitung nach τ bezeichne. Zeigen Sie, dass das Funktional nicht von der Parametrisierung der Kurve abhängt. Zeigen Sie weiter: Ist z stationärer Punkt von $\mathcal{L}$ und wählt man als Parameter τ die Eigenzeit (Bogenlänge) bezüglich der Minkowskimetrik η, so genügt z der Gleichung
$$\ddot{z}^a = -(c^{-2}\dot{z}^a\dot{z}^b - \eta^{ab})\partial_b\phi \circ z\,. \tag{7}$$

Wir sehen uns nun (7) für zwei Spezialfälle an. Im ersten Fall soll ϕ zeitunabhängig sein: $\partial_t\phi = 0$ (das gilt dann natürlich nur im gewählten Inertialsystem). Zeigen Sie, dass in diesem Fall (7) äquivalent ist zu
$$\frac{d^2\vec{z}(t)}{dt^2} = -\left[1 - \left(\frac{d\vec{z}(t)}{cdt}\right)^2\right] \vec{\nabla}\phi(\vec{z}(t))\,. \tag{8}$$

Leiten Sie daraus ab, dass $k := \gamma\exp(\phi/c^2)$ entlang der Bahn eine erhaltene (dimensionslose) Größe ist, wobei hier, wie üblich, $\gamma = \sqrt{1 - v/c^2})$ mit $v = \|d\vec{z}/dt\|$. Formulieren Sie damit (8) um in
$$\frac{d^2\vec{z}(t)}{dt^2} = -\frac{c^2}{2k^2}\vec{\nabla}\exp(2\phi/c^2) = -\frac{c^2}{2k^2}\vec{\nabla}\bigl(1 + \Phi/c^2\bigr)^2\,. \tag{9}$$

Die letzte Form wird sich bei der Berechnung der Periastronpräzession als sehr hilfreich erweisen.

Im zweiten Fall spezialisieren wir (7) auf den Fall, in dem ϕ nur von einer Raumkoordinate y abhängt (sie gibt die 'vertikale' Richtung an). Schreiben Sie für diesen Fall all vier Gleichungen explizit hin und zeigen Sie sodann folgendes Resultat: Sind die Anfangsbedingungen so gewählt, dass die Vertikalgeschwindigkeit zu Beginn verschwindet, so ist das Eigenzeitintervall, das die Testmasse benötigt um eine feste Vertikalstrecke zu durchfallen unabhängig von der anfänglichen Horizontalgeschwindigkeit. (Die vertikale Bewegung als Funktion der Eigenzeit entkoppelt von der Horizontalbewegung.) In welchem Verhältnis steht diese Eigenschaft zu der Forderung des sogenannten *Äquivalenzprinzips*, nach dem die Weltlinie eines im Gravitationsfeld frei fallendes Testteilchens nur von dessen Anfangspunkt und Anfangs(vierer)geschwindigkeit in der Raumzeit abhängt? Würde die genannte Eigenschaft auch noch gelten, wenn man die Bewegung statt auf die Eigenzeit auf die Koordinatenzeit t bezöge?